

Origamis

Fabrice Mouhartem

Séminaire de la détente mathématique

16/03/2016



Qu'est-ce que l'origami ?

Du japonais « **Ori** » pour plier et « **Kami** » pour papier.



Qu'est-ce que l'origami ?

Son origine est incertaine.



Tessellation d'un plisseur



Tour de Garde

Qu'est-ce que l'origami ?

Son origine est incertaine.



Tessellation d'un plisseur

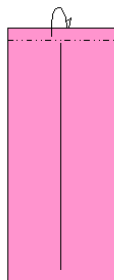


Tour de Garde

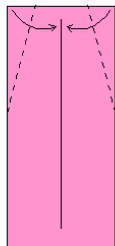
Suivant sa définition de « plier ».

Les différents styles d'origami

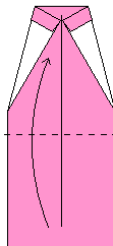
Origami minimaliste



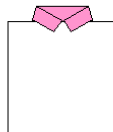
Rectangle
3 x 7.
Mountain
fold top



Valley fold
corners to
meet center
line



Valley fold
bottom part
and tuck in
collar



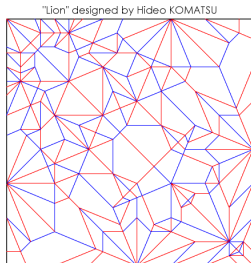
Shirt.
Traditional

T-Shirt en 4 plis

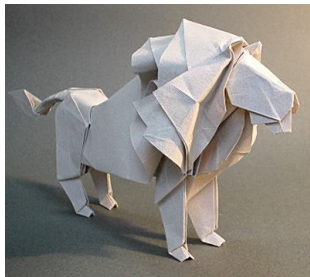
Les différents styles d'origami

Origami « Traditionnel »

Lion d'Hideo Komatsu ↓



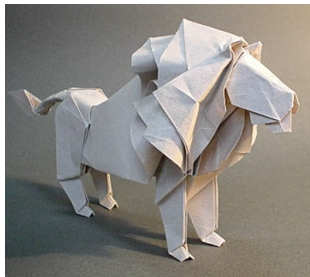
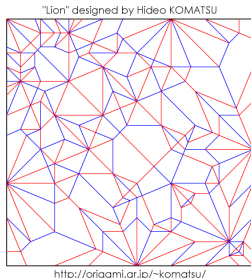
<http://origami.gr.jp/~komatsu/>



Les différents styles d'origami

Origami « Traditionnel »

Lion d'Hideo Komatsu ↓



↑ En plus que quatre plis.

Les différents styles d'origami

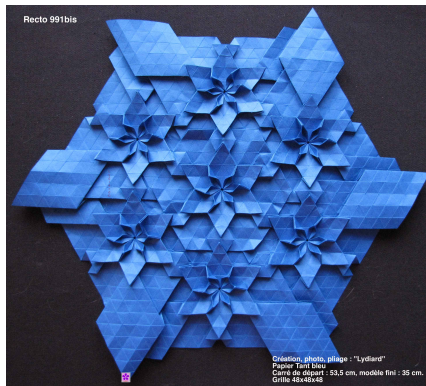
Origami Modulaire



Kusudama Versailles (60 modules), par *Krystyna Burczyk*

Les différents styles d'origami

Tessellations



Lydia Diard

Les différents styles d'origami

Tessellations



Joel Cooper



Melina Hermesen

Les différents styles d'origami

Auto-référent/fractale



Les différents styles d'origami

Froissing



Vincent Floderer



Victor Coeurjoly

Plan

- 1 Introduction
- 2 De la feuille au pliage
- 3 Pliable ou $\neg$ pliable ?
- 4 Applications

Comment représenter un origami ?

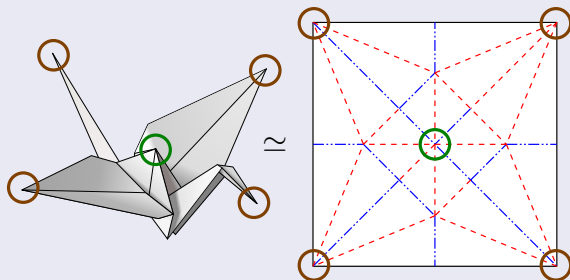
Comment représenter une forme ?

Comment représenter un origami ?

La carte de plis

Comment représenter une forme ?

Pointes



4 grandes pointes et 1 courte.

Comment représenter un origami ?

Représenter une forme :

- Nombre de pointes
- Longueur des pointes

Comment représenter un origami ?

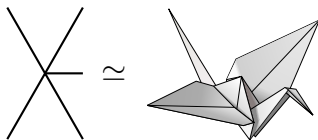
L'arbre

Représenter une forme :

- Nombre de pointes $|V|$
- Longueur des pointes $w : E \rightarrow \mathbb{R}$

Solution

Un graphe pondéré : $G = (V, E, w)$.



Comment construire un origami ?

La méthode de Lang

Arbre



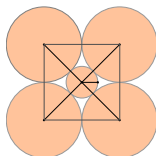
Comment construire un origami ?

La méthode de Lang

Arbre

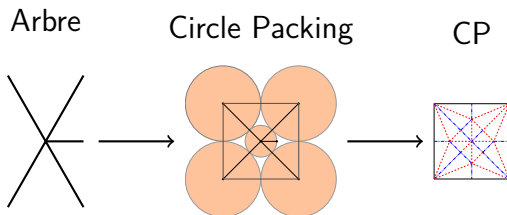


Circle Packing



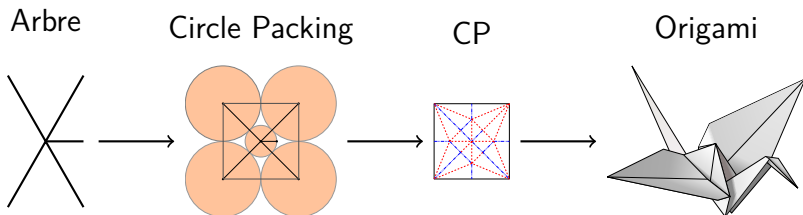
Comment construire un origami ?

La méthode de Lang



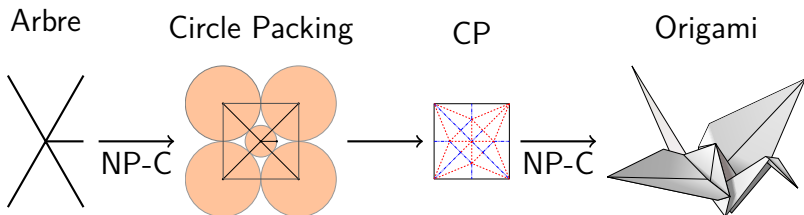
Comment construire un origami ?

La méthode de Lang



Comment construire un origami ?

La méthode de Lang



NP-Complet ?

Ce que ça ne veut pas dire

NP-Complet $\neq$ Difficile.

NP-Complet ?

Ce que ça ne veut pas dire

NP-Complet $\neq$ Difficile.

- Satisfiabilité est NP-C
- Factorisation est ???

NP-Complet ?

Ce que ça ne veut pas dire

NP-Complet $\neq$ Difficile.

- Satisfiabilité est NP-C
- Factorisation est ???

Ce que ça signifie

Il existe des instances difficiles à résoudre :



Mais...

Conditions nécessaires :

- Contrainte de parité : à chaque croisement il y a un nombre pair de plis
- Contrainte de Kawazaki : à chaque croisement, la somme alternée des angles vaut 0.
- Contrainte de Maekawa : à chaque croisement, la différence entre le nombre de plis montagnes et vallées vaut 2.

Mais. . .

Conditions nécessaires :

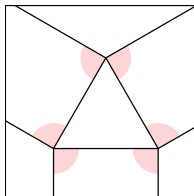
- Contrainte de parité : à chaque croisement il y a un nombre pair de plis
- Contrainte de Kawazaki : à chaque croisement, la somme alternée des angles vaut 0.
- Contrainte de Maekawa : à chaque croisement, la différence entre le nombre de plis montagnes et vallées vaut 2.

↑ Critères locaux.

Contre-exemple pour un CP neutre

Rappel

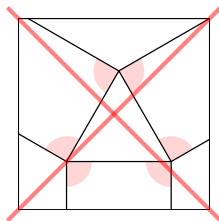
- Contrainte de parité : à chaque croisement il y a un nombre pair de plis
- Contrainte de Kawazaki : à chaque croisement, la somme alternée des angles vaut 0.



Contre-exemple pour un CP neutre

Rappel

- Contrainte de parité : à chaque croisement il y a un nombre pair de plis
- Contrainte de Kawasaki : à chaque croisement, la somme alternée des angles vaut 0.



Plan

- 1 Introduction
- 2 De la feuille au pliage
- 3 Pliable ou $\neg$ pliable ?
- 4 Applications

Nombres constructibles

Règle et Compas

Longueur entre deux points construits à la règle et au compas.

Nombres constructibles

Règle et Compas

Longueur entre deux points construits à la règle et au compas.

Origami

Longueur entre deux points construits à l'origami.

Nombres constructibles

Règle et Compas

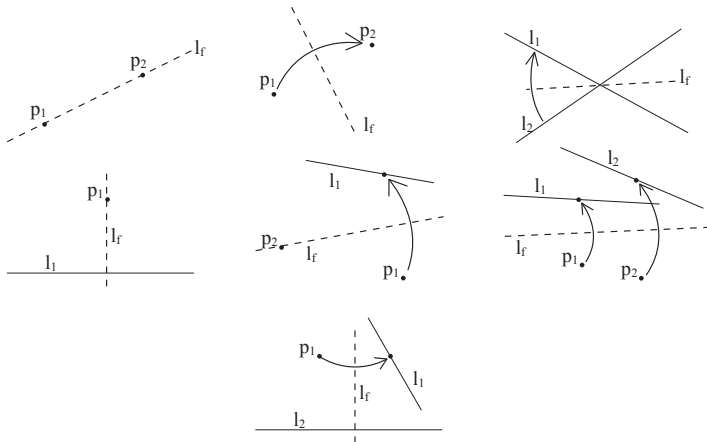
Longueur entre deux points construits à la règle et au compas.

Origami

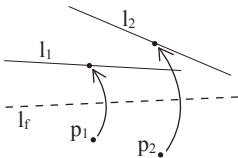
Longueur entre deux points construits à l'origami.

- Qu'est-ce qu'un point construit à l'origami ?

Axiomes de Huzita-Justin

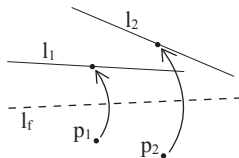


Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

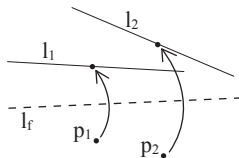
Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

→ Emmener un deux points distincts simultanément sur deux droites distinctes.

Axiome 6 de Huzita-Justin

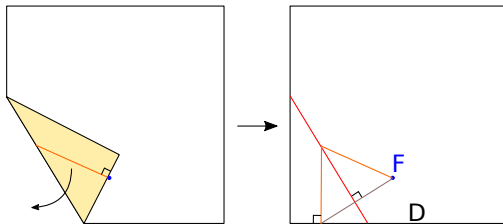


Que signifie-t-il ?

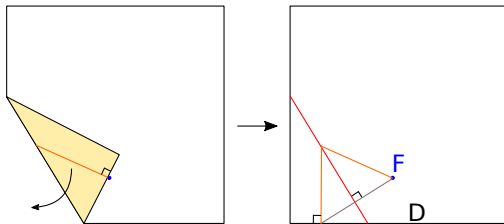
→ Emmener un deux points distincts simultanément sur deux droites distinctes.

Qu'est-ce qu'emmener un point sur une droite ?

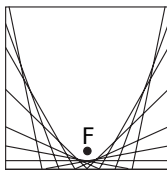
Un point sur une droite



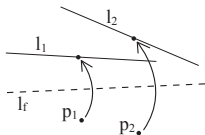
Un point sur une droite



Ce sont les tangentes à une parabole.



Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

Tracer une droite simultanément tangentes à deux paraboles.

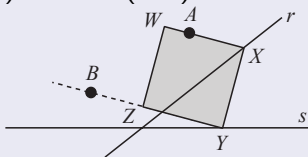


$\implies$ trouver les racines d'un polynôme de degré 3.

Comment ?

Le carré de Beloch

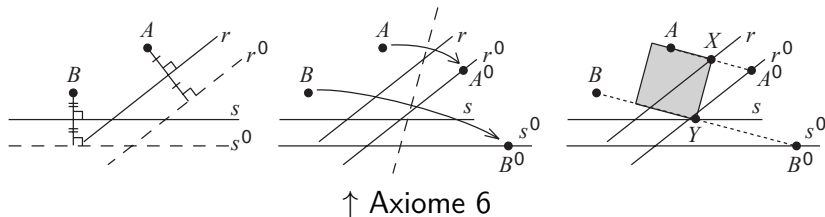
Soient A, B deux points du plan, r, s deux droites, on veut construire le carré $WXYZ$ où X, Y passent respectivement par r et s , et $A \in (WX)$ et $B \in (YZ)$



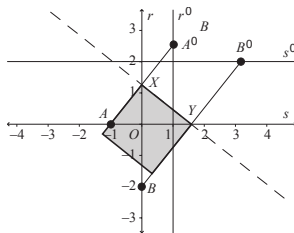
Comment

Carré de Beloch

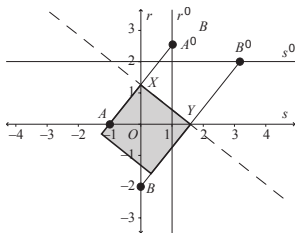
Construction du carré de Beloch à l'origami :



Duplication du cube

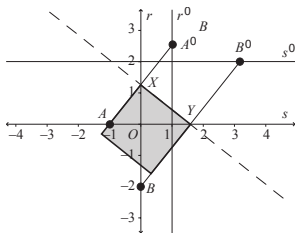


Duplication du cube



$$OX = \sqrt[3]{2}?$$

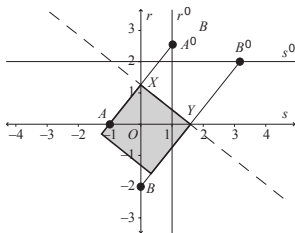
Duplication du cube



$$OX = \sqrt[3]{2}?$$

$$OAX \sim OXY \sim OBY \rightarrow \frac{OX}{OA} = \frac{OY}{OX} = \frac{OB}{OY}$$

Duplication du cube

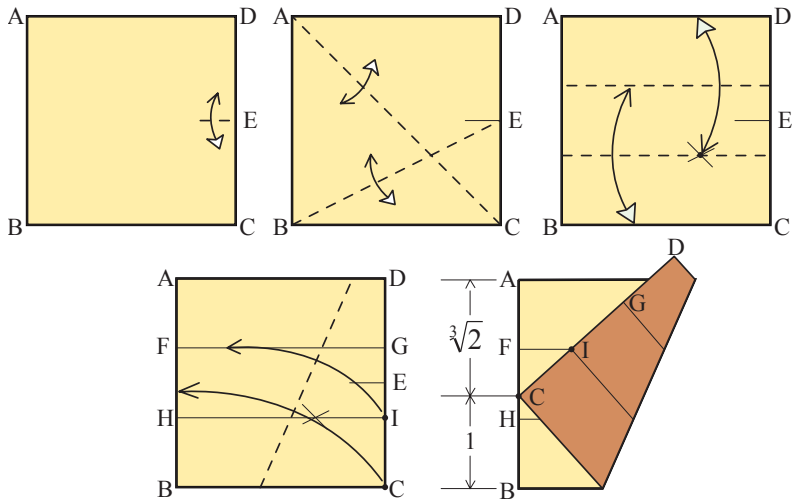


$$OX = \sqrt[3]{2}?$$

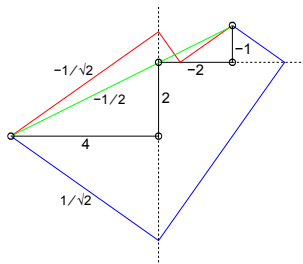
$$OAX \sim OXY \sim OBY \rightarrow \frac{OX}{OA} = \frac{OY}{OX} = \frac{OB}{OY}$$

$$OX = \frac{OY}{OX} = \frac{2}{OY} \rightarrow \boxed{OX^3 = OX \cdot \frac{OY}{OX} \cdot \frac{2}{OY} = 2}$$

Duplication du cube



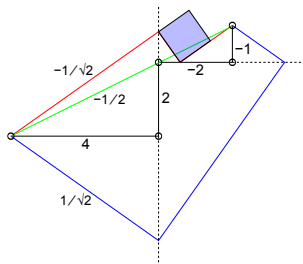
Méthode de Lill



Résolution de $4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

Méthode graphique de recherche de racines d'un polynôme à coefficients constructibles.

Méthode de Lill



Résolution de $4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$

Méthode graphique de recherche de racines d'un polynôme à coefficients constructibles.

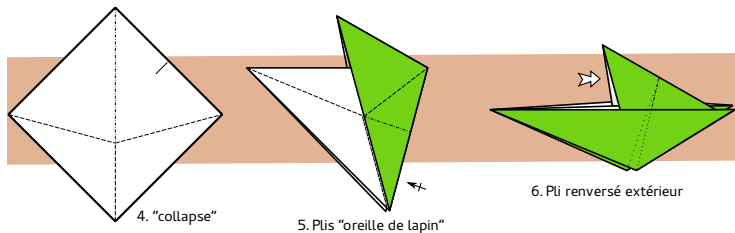
Cela revient à construire un carré de Belloch

Les limites des axiomes de Huzita-Justin

Ils ne représentent que les constructions ne créant qu'un nouveau pli à la fois.

Les limites des axiomes de Huzita-Justin

Ils ne représentent que les constructions ne créant qu'un nouveau pli à la fois.



On peut plier plus d'un pli à la fois !

Plus d'un pli dans son sac

- On est capable de construire les racines d'un polynôme de degré 4 !

Plus d'un pli dans son sac

- On est capable de construire les racines d'un polynôme de degré 4 !
- Mais on a 489 axiomes. . .

Plus d'un pli dans son sac

- On est capable de construire les racines d'un polynôme de degré 4 !
- Mais on a 489 axiomes. . .

Généralisation

En s'autorisant n plis simultanés, on peut résoudre les polynômes de degré $n + 2$. [AL06]

Et bien plus encore. . .

Méthodes « pratiques »

- Décomposition binaire

Et bien plus encore. . .

Méthodes « pratiques »

- Décomposition binaire
- Approximation binaire (ou *de Fujimoto*)

Et bien plus encore. . .

Méthodes « pratiques »

- Décomposition binaire
- Approximation binaire (ou *de Fujimoto*)
- Construction par fraction continuée.

Plan

- 1 Introduction
- 2 De la feuille au pliage
- 3 Pliable ou $\neg$ pliable ?
- 4 Applications**

Le premier origamiste

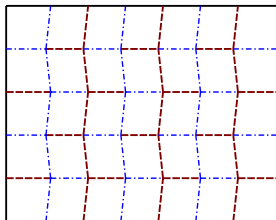


Le premier origamiste



À cause des contraintes physiques.

Miura-Ori



Carte de pli du Miura Ori

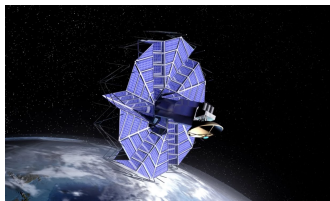
- Structure rigide
- Propage les plis automatiquement
- Minimise les contraintes mécaniques

Utilisation



- Pliage de cartes routières

Utilisation



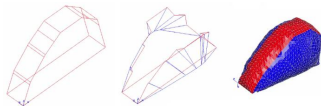
- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites

Utilisation



- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites
- Surfaces légères

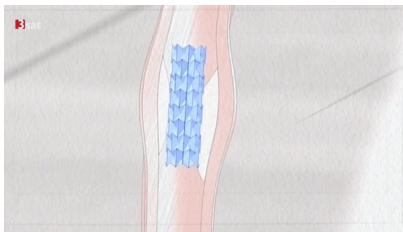
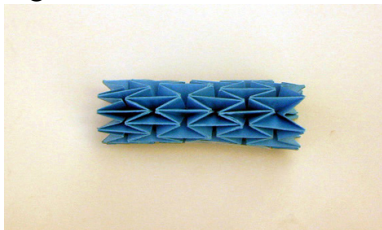
Utilisation



- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites
- Surfaces légères
- Airbags

Stent

Pavage de l'ananas.



Conclusion

- L'homme n'a pas inventé le pliage
- L'origami sert dans toutes les sciences
- La définition de l'origami est ambiguë
- Source de problèmes combinatoires
- Source de problèmes géométriques
- Source d'émerveillement

Références

- The complexity of Flat Origami, M. Bern and B. Hayes. In 7th SODA. 1996
- One-, Two-, and Multi-Fold Origami Axioms, R. C. Alperin and R. J. Lang. In 4OSME, 2006.
- Origami and Geometric Constructions, R. J. Lang. 1996.
- Origami : Complexity in Creases (Again). R. J. Lang. In Engineering and Science. 2004.
- Origami design secrets : mathematical methods for an ancient art. R. J. Lang. Ed. Springer. 2005.
- Solving Cubics with Creases : The Work of Beloch and Lill. T. C. Hull. In Mathematical Monthly. 2011.
- The Origami Code. Documentaire. 2015.

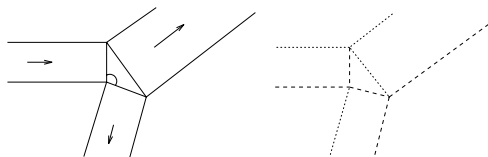
+ tous les plieurs et créateurs.

Merci de votre attention



Flat Foldable is NP-Hard

Reduction from NAE-3-SAT

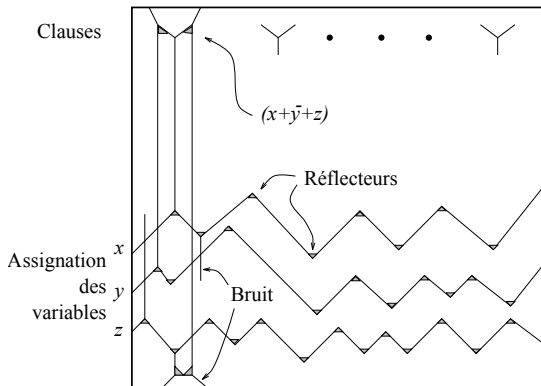


CP d'un gadget réflecteur

Théorème

Le réflecteur est pliable à plat ssi l'orientation des plis « entrants » est la même que celle du pli sortant (du grand côté) et est différente de celle des plis sortants du petit côté.

Flat Foldable is NP-Hard



→ Avec un gadget plus compliqué, on peut prouver que le pliage d'un CP orienté est NP-Complet

Flat Foldable is NP-Hard

