

Pliages et mathématiques : quelques résultats étonnants

Fabrice Mouhartem

Lycée Albert Einstein, Bagnols-sur-Cèze

7 décembre 2018



Qu'est-ce que l'origami ?

Du japonais « **Ori** » pour plier et « **Kami** » pour papier.



Créé par Akira Yoshizawa. Plié par Gilad Aharoni.

Qu'est-ce que l'origami ?

Son origine est incertaine.



Tessellation d'un plisseur

Gérard Lognon



Tour de Garde

David *Gachepapier*

Qu'est-ce que l'origami ?

Son origine est incertaine.



Tessellation d'un plisseur

Gérard Lognon



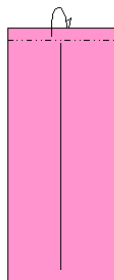
Tour de Garde

David *Gachepapier*

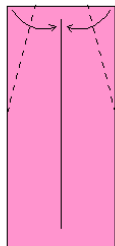
Suivant sa d finition de « plier ».

Les différents styles d'origami

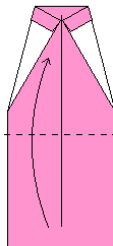
Origami minimaliste



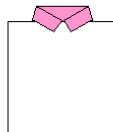
Rectangle
3 x 7.
Mountain
fold top



Valley fold
corners to
meet center
line



Valley fold
bottom part
and tuck in
collar



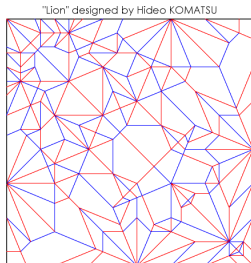
Shirt.
Traditional

T-Shirt en 4 plis

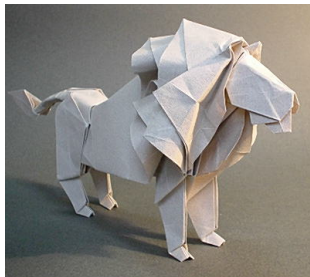
Les différents styles d'origami

Origami « Traditionnel » ou « 22,5 »

Lion d'Hideo Komatsu ↓



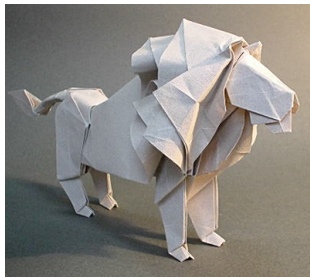
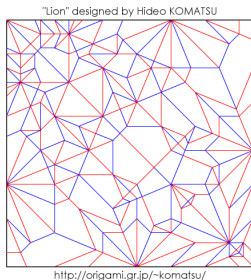
<http://origami.gr.jp/~komatsu/>



Les différents styles d'origami

Origami « Traditionnel » ou « 22,5 »

Lion d'Hideo Komatsu ↓



↑ En plus de quatre plis.

Les différents styles d'origami

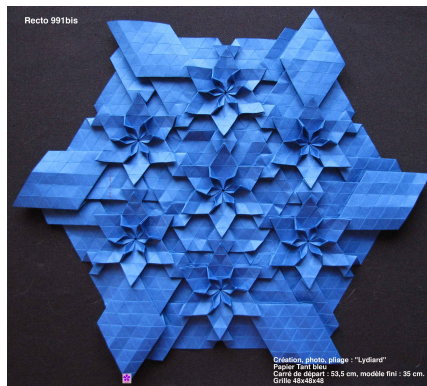
Origami Modulaire



Kusudama Versailles (60 modules), par *Krystyna Burczyk*

Les différents styles d'origami

Tessellations



Lydia Diard

Les différents styles d'origami

Tessellations



Joel Cooper



Melina Hermesen



Beth Johnson

Les différents styles d'origami

Auto-référent/fractale



Roman Diaz



Evan Zodi

Les différents styles d'origami

Froissing

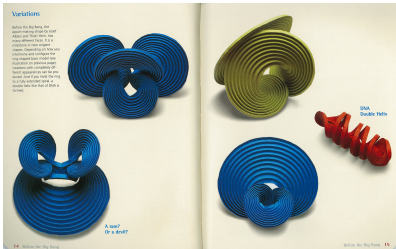


Vincent Floderer

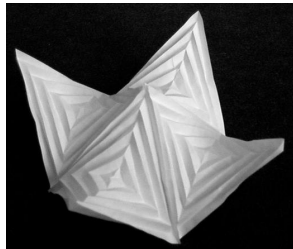


Victor Coeurjoly

Les différents styles d'origami



Thoki Yenn



Erik Demaine

Les différents styles d'origami

Pliage humide



Hoàng Tiên Quyết

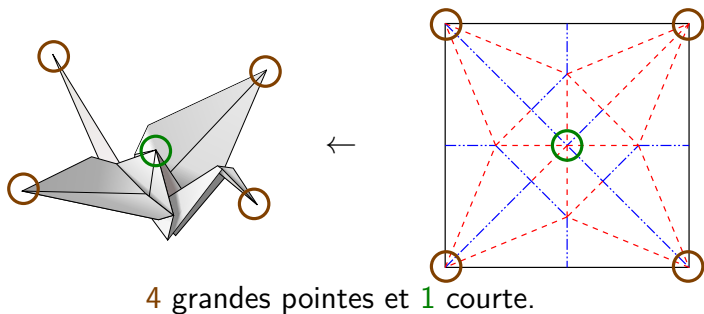


Daniel Chang

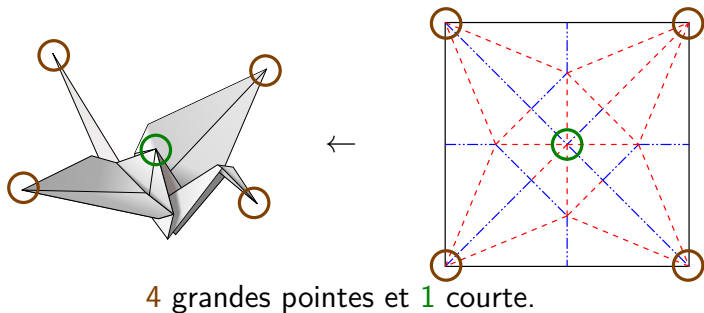
Plan

- 1 Introduction
- 2 Comment communiquer les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe
- 4 Le pliage dans la science

Comment représenter le pliage ?



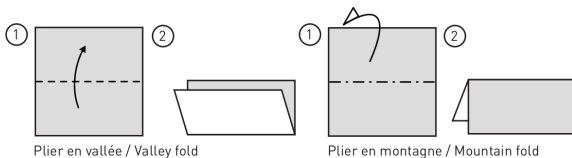
Comment représenter le pliage ?



Il y a *seulement* deux types de plis : les bleus et les rouges.

Le langage des origamistes

Le solfège des plieurs

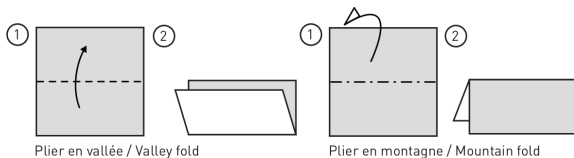


Issu de <http://mfpp-origami.fr/origami/diagrammes/>

- Les pointillés représentent les plis en vallée.
- Les points-tirets représentent les plis en montagne.

Le langage des origamistes

Le solfège des plieurs



Issu de <http://mfpp-origami.fr/origami/diagrammes/>

- Les pointillés représentent les plis **en vallée**.
- Les points-tirets représentent les plis **en montagne**.

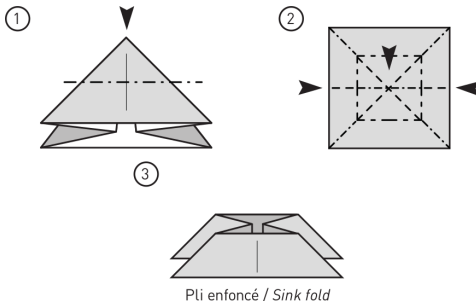
Remarque.

Un pli **montagne** devient **vallée** en retournant la feuille.

Le langage des origamistes

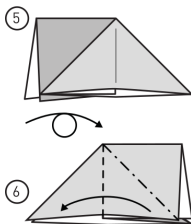
Le solfège des plieurs

- Pli vallée (creux)
Valley fold
- . - . - . Pli montagne (relief)
Mountain fold
- ↶ ↷ Plier, déplier
Crease, fold and unfold
- ↶ Plier vers l'avant
Fold toward the front
- ↷ Plier vers l'arrière
Fold toward the back
- Enfoncer
Push in
- ↺ Retourner le modèle
Turn the model over
- ➡ Ouvrir, tirer, développer
Open out
- ➡ Vue agrandie
Enlarged view
- Trait d'un pli existant
Existing crease
- ⚡ Replier
Crimp, pleat
- ➡ Insérer, glisser dans
Insert, tuck in
- ⦶ Répéter l'opération deux fois
Repeat twice
- ⬤ Couleur dessous
Color below
- ↻ 180° Rotation de 180°
Rotate 180°

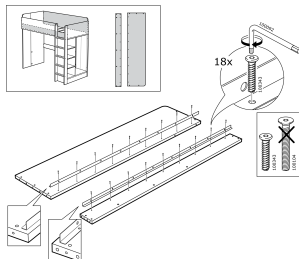


■ Mais il y a aussi des raccourcis

Le lien entre tout ça ?



6



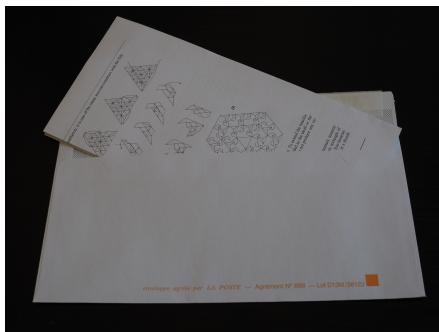
```
fonction zero_deg2(a,b,c):  
  delta = b*b-4*a*c  
  si delta = 0:  
    renvoyer -b/(2*a)  
  sinon si delta > 0:  
    renvoyer (-b + sqrt(delta)) / (2*a)  
    et (-b - sqrt(delta)) / (2*a)  
  sinon  
    renvoyer "complexe"
```

Plan

- 1 Introduction
- 2 Comment communiquent les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe**
- 4 Le pliage dans la science

Problème

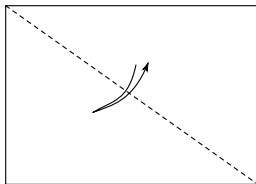
Comment plier une lettre au format **A4 en trois** pour qu'elle rentre dans une enveloppe ?



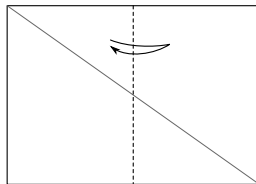
Première solution

Par le pliage

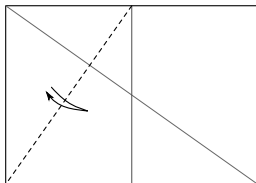
1.



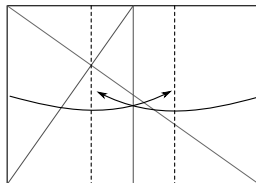
2.



3.



4.



Première solution

Pourquoi ça fonctionne ?

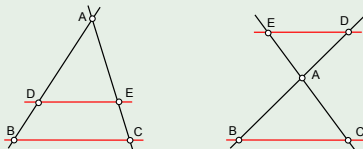
Des idées ?

Première solution

Pourquoi ça fonctionne ?

Des idées ?

Théorème de Thalès (4^e/3^e)



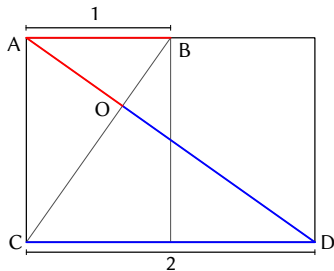
Soit un triangle ABC , et deux points D et E des droites (AB) et (AC) de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC) .

Alors :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

Première solution

Explications

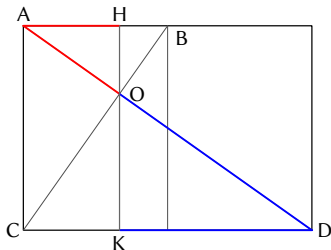


Théorème de Thalès

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{OD} = 2 \times \overline{OA}$$

Première solution

Explications



Théorème de Thalès

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{DK} = 2 \times \overline{AH}$$

Première solution

Avantages

- Peut-être généralisé à d'autres subdivisions :
- Construction exacte et prouvée



Problèmes

- Cela laisse des traces sur la feuille

Première solution

Avantages

- Peut-être généralisé à d'autres subdivisions :
- Construction exacte et prouvée

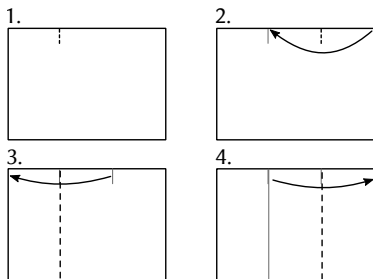


Problèmes

- Cela laisse des traces sur la feuille
- Plier la grande diagonale précisément n'est pas facile
- Repérer un point au milieu de la feuille n'est pas facile

Deuxième solution

Approximation de Fujimoto

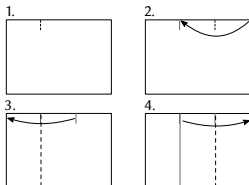


- 1 Estimer le centre
- 2 Ramener un bord sur la marque de 1. et marquer
- 3 Ramener un bord sur la marque de 2. et plier
- 4 Ramener un bord sur la marque de 3. et plier

Deuxième solution

Explications

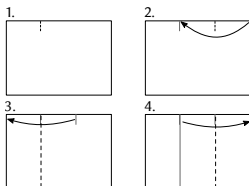
- Il s'agit d'un **algorithme**



Deuxième solution

Explications

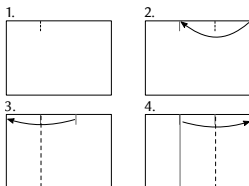
- Il s'agit d'un **algorithme**
- À chaque étape, la **distance au tiers** est **divisée par deux**
 - ▶ Si à l'étape 1 on est à 5mm du tiers, à l'étape 3, on sera à 1.25mm du tiers



Deuxième solution

Explications

- Il s'agit d'un **algorithme**
- À chaque étape, la **distance au tiers** est **divisée par deux**
 - ▶ Si à l'étape 1 on est à 5mm du tiers, à l'étape 3, on sera à 1.25mm du tiers
 - ▶ Si on répète les étapes 2 et 3 une fois de plus, on sera à moins d'un tiers de millimètre du tiers ...



Deuxième méthode

- Les plis parasites sont sur le bord de la feuille
- Plus facile à plier que la première
- Peut se généraliser à d'autres subdivisions

Deuxième méthode

- Les plis parasites sont sur le bord de la feuille
- Plus facile à plier que la première
- Peut se généraliser à d'autres subdivisions
- Mais il s'agit d'une approximation...

Première méthode contre deuxième méthode

Question

Quelle méthode préférez-vous ?

Première méthode contre deuxième méthode

Ou théorie contre pratique

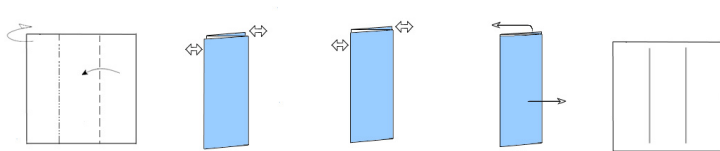
- ▶ C'est un choix personnel...

Première méthode contre deuxième méthode

Ou théorie contre pratique

► C'est un choix personnel...

En pratique, on fera juste glisser la feuille jusqu'à avoir un tiers raisonnable...



Issu de <https://www.origami-resource-center.com/>

Théorie contre Pratique

Modèle généré par ordinateur



Solenopsis invicta

Robert J. Lang

« Pliage classique »



Fourmichat

Éric Vigier

Plan

- 1 Introduction
- 2 Comment communiquent les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe
- 4 Le pliage dans la science

Le premier origamiste

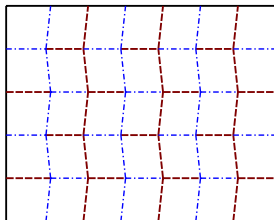


Le premier origamiste



À cause des contraintes physiques.

Miura-Ori



Carte de plis du Miura Ori

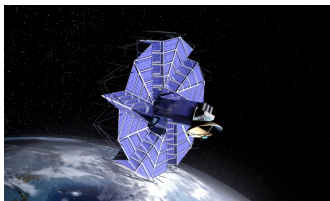
- Structure rigide
- Propage les plis automatiquement
- Minimise les contraintes mécaniques

Applications



- Pliage de cartes routières

Applications



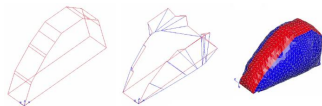
- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites

Applications



- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites
- Surfaces légères

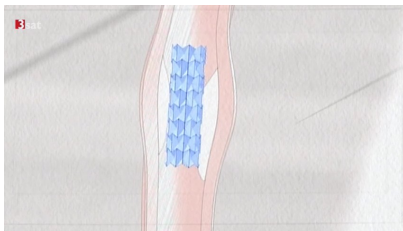
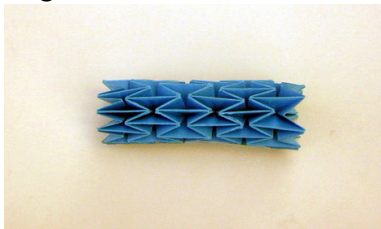
Applications



- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites
- Surfaces légères
- Airbags

Stent

Pavage de l'ananas.



Conclusion

- L'homme n'a pas inventé le pliage
- La définition même du pliage est ambiguë
- Le pliage est utile dans toutes les sciences
- C'est une source de problèmes en mathématiques et en informatique
- Et aussi une source d'émerveillement. . .

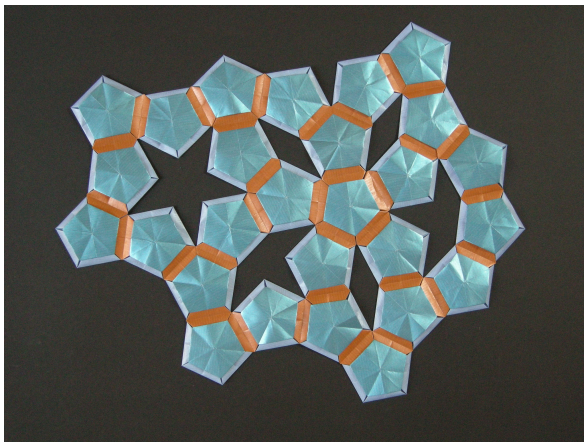
Références

- Le PLI. Édité par le MFPP. n° 14 – 24. Rubrique “Pliage et Mathématiques”.
- The Clouds of Thoki Yenn. 2003. <http://erikdemaine.org/thok/>
- The Miura Ori Map. Ian Bain.
www.britishorigami.info/academic/miura.php (Informations sur le pliage de cartes routières)
- Pliages & Mathématiques. Didier Boursin et Valérie Larose. Éditions ACL. 1997.
- Mathémagie des pliages. Didier Boursin et Valérie Larose. Éditions ACL. 2000.
- The Origami Code. Documentaire. 2015.
- Paper Folding for the Mathematics Class. Donovan A. Johnson. Publié par National Education Association. 2957.
- Origami Ressource Center.
<https://www.origami-resource-center.com/origami-basics.html>

+ tous les plieurs et créateurs présentés au cours des diapos

Merci de votre attention

Questions, remarques ?



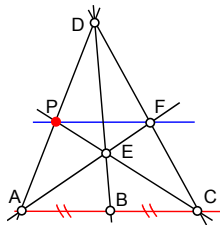
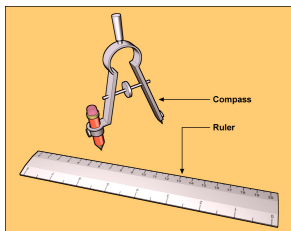
Mélanide*/Christiane Bettens

S'il reste du temps

Le pliage au service des grecs

Nombres constructibles

- Les grecs pensaient que tous les nombres pouvaient être construits à la règle (non graduée) et au compas.



Nombres constructibles

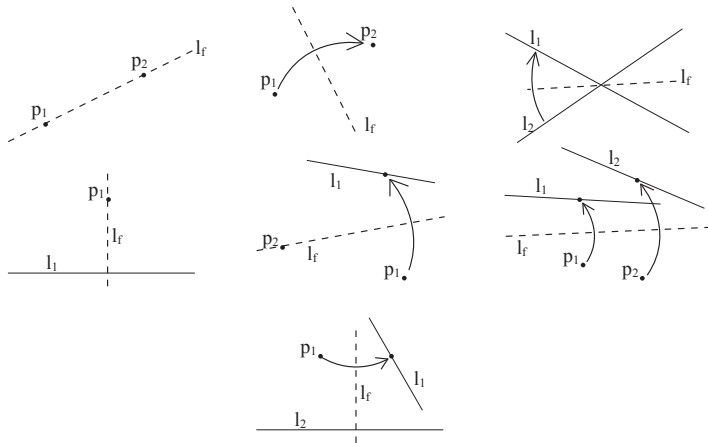
- Trois questions sont restées ouvertes jusqu'à la renaissance :
 - ▶ La duplication du cube
 - ▶ La trisection de l'angle
 - ▶ La quadrature du cercle

Nombres constructibles

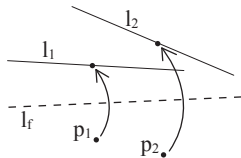
- Trois questions sont restées ouvertes jusqu'à la renaissance :
 - ▶ La duplication du cube
 - ▶ La trisection de l'angle
 - ▶ La quadrature du cercle
- Les deux premiers peuvent être résolus à l'aide du pliage seul

Représenter le pliage

Axiomes de Huzita-Justin

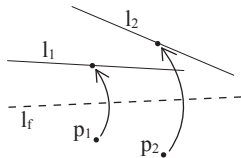


Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

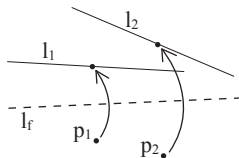
Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

→ Emmener un deux points distincts simultanément sur deux droites distinctes.

Axiome 6 de Huzita-Justin

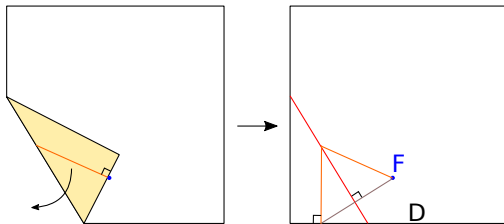


Que signifie-t-il ?

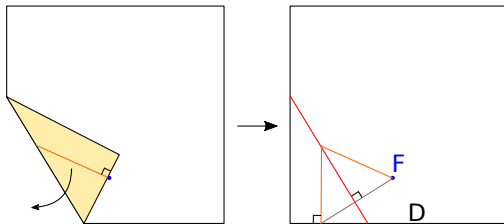
→ Emmener un deux points distincts simultanément sur deux droites distinctes.

Qu'est-ce qu'emmener un point sur une droite ?

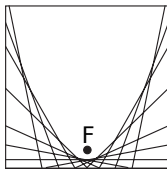
Un point sur une droite



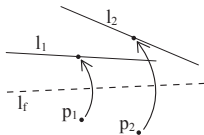
Un point sur une droite



Ce sont les tangentes à une parabole.



Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

Tracer une droite simultanément tangentes à deux paraboles.



⇒ résoudre la duplication du cube

après un peu de travail...