

Pliages et mathématiques : quelques résultats étonnants

Fabrice Mouhartem

MATH.en.JEANS — Congrès de Lyon 2018

22 mars 2018



Qu'est-ce que l'origami ?

Du japonais « **Ori** » pour plier et « **Kami** » pour papier.



Créé par Akira Yoshizawa. Plié par Gilad Aharoni.

Qu'est-ce que l'origami ?

Son origine est incertaine.



Tessellation d'un plisseur

Gérard Lognon



Tour de Garde

David *Gachepapier*

Qu'est-ce que l'origami ?

Son origine est incertaine.



Tessellation d'un plisseur

Gérard Lognon



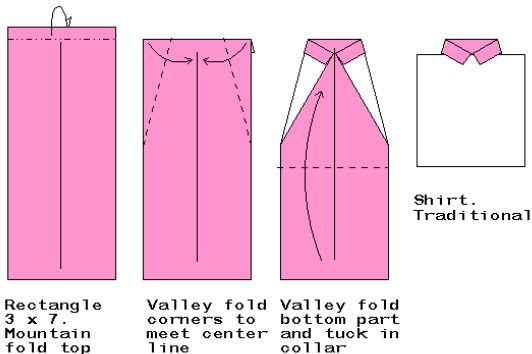
Tour de Garde

David *Gachepapier*

Suivant sa définition de « plier ».

Les différents styles d'origami

Origami minimaliste

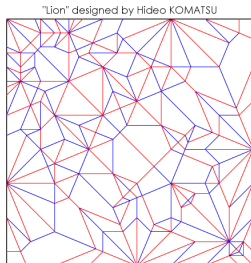


T-Shirt en 4 plis

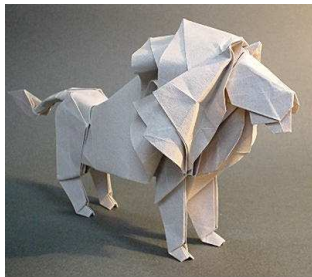
Les différents styles d'origami

Origami « Traditionnel » ou « 22,5 »

Lion d'Hideo Komatsu ↓



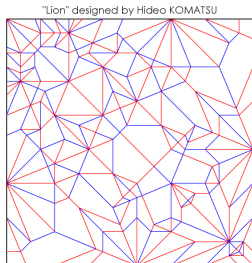
<http://origami.gr.jp/~komatsu/>



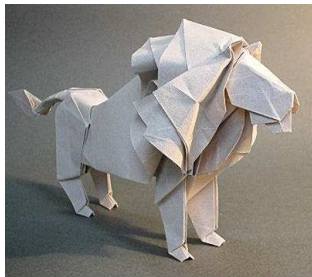
Les différents styles d'origami

Origami « Traditionnel » ou « 22,5 »

Lion d'Hideo Komatsu ↓



<http://origami.gr.jp/~komatsu/>



↑ En plus de quatre plis.

Les différents styles d'origami

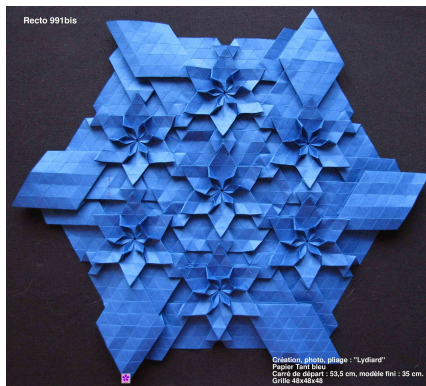
Origami Modulaire



Kusudama Versailles (60 modules), par *Krystyna Burczyk*

Les différents styles d'origami

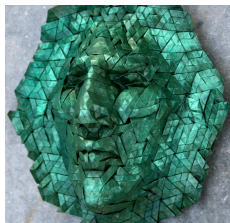
Tessellations



Lydia Diard

Les différents styles d'origami

Tessellations



Joel Cooper



Melina Hermsen



Beth Johnson

Les différents styles d'origami

Auto-référent/fractale



Roman Diaz



Evan Zodi

Les différents styles d'origami

Froissing



Vincent Floderer



Victor Coeurjoly

Les différents styles d'origami

Pliage humide



Hoàng Tiên Quyêt

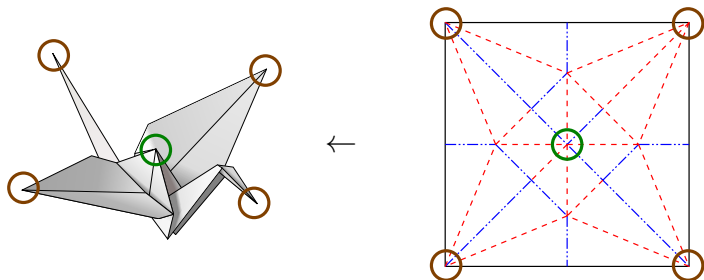


Daniel Chang

Plan

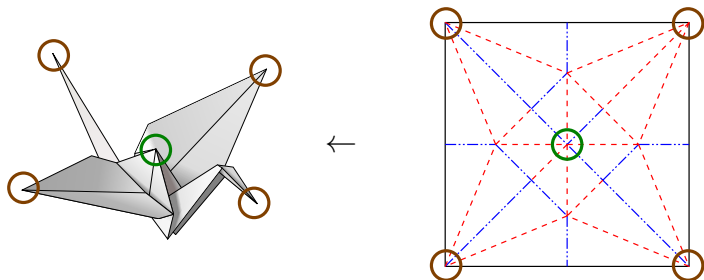
- 1 Introduction
- 2 Comment communiquent les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe
- 4 Le pliage dans la science

Comment représenter le pliage ?



4 grandes pointes et 1 courte.

Comment représenter le pliage ?

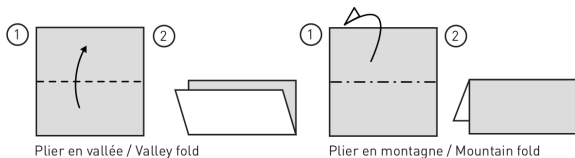


4 grandes pointes et 1 courte.

Il y a *seulement* deux types de plis : les bleus et les rouges.

Le langage des origamistes

Le solfège des plieurs

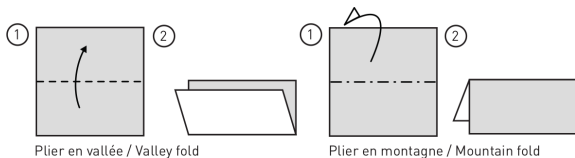


Issu de <http://mfpp-origami.fr/origami/diagrammes/>

- Les pointillés représentent les plis **en vallée**.
- Les points-tirets représentent les plis **en montagne**.

Le langage des origamistes

Le solfège des plieurs



Issu de <http://mfpp-origami.fr/origami/diagrammes/>

- Les pointillés représentent les plis **en vallée**.
- Les points-tirets représentent les plis **en montagne**.

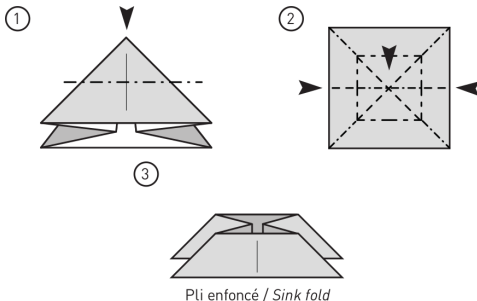
Remarque.

Un pli **montagne** devient **vallée** en retournant la feuille.

Le langage des origamistes

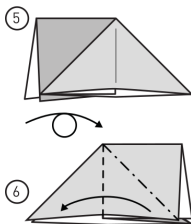
Le solfège des plieurs

- Pli vallée (creux)
Valley fold
- Pli montagne (relief)
Mountain fold
- ↶ ↷ Plier, déplier
Crease, fold and unfold
- ↶ Plier vers l'avant
Fold toward the front
- ↷ Plier vers l'arrière
Fold toward the back
- ▶ Enfoncer
Push in
- ↻ Retourner le modèle
Turn the model over
- ➡ Ouvrir, tirer, développer
Open out
- ➡ Vue agrandie
Enlarged view
- Trait d'un pli existant
Existing crease
- ⚡ Replier
Crimp, pleat
- ┆ Insérer, glisser dans
Insert, tuck in
- ⦶ Répéter l'opération deux fois
Repeat twice
- ◐ Couleur dessous
Color below
- ↻ 180°
Rotate 180°

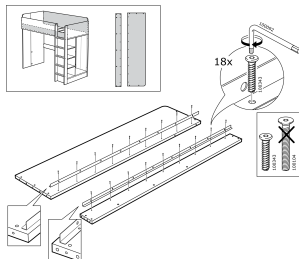


■ Mais il y a aussi des raccourcis

Le lien entre tout ça ?



6



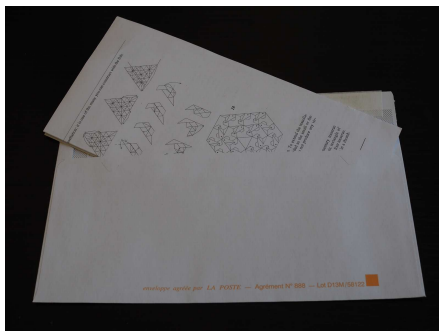
```
fonction zero_deg2(a,b,c):  
  delta = b*b-4*a*c  
  si delta = 0:  
    renvoyer -b/(2*a)  
  sinon si delta > 0:  
    renvoyer (-b + sqrt(delta) ) / (2*a)  
    et (-b - sqrt(delta) ) / (2*a)  
  sinon  
    renvoyer "complexe"
```

Plan

- 1 Introduction
- 2 Comment communiquent les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe**
- 4 Le pliage dans la science

Problème

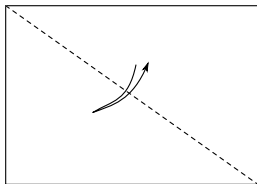
Comment plier une lettre au format **A4** en trois pour qu'elle rentre dans une enveloppe ?



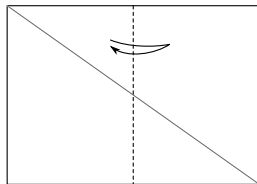
Première solution

Par le pliage

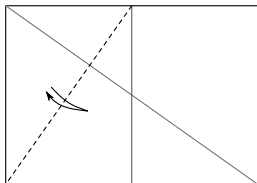
1.



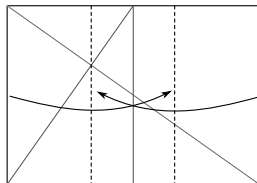
2.



3.



4.



Première solution

Pourquoi ça fonctionne ?

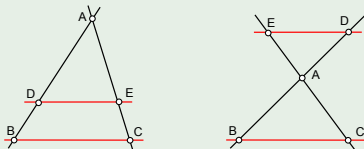
Des idées ?

Première solution

Pourquoi ça fonctionne ?

Des idées ?

Théorème de Thalès (4^e/3^e)



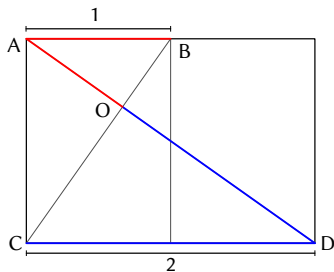
Soit un triangle ABC , et deux points D et E des droites (AB) et (AC) de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC) .

Alors :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

Première solution

Explications

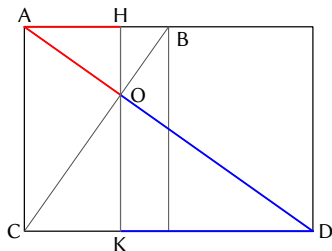


Théorème de Thalès

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{OD} = 2 \times \overline{OA}$$

Première solution

Explications



Théorème de Thalès

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{DK} = 2 \times \overline{AH}$$

Première solution

Avantages

- Peut-être généralisé à d'autres subdivisions :
- Construction exacte et prouvée



Problèmes

- Cela laisse des traces sur la feuille

Première solution

Avantages

- Peut-être généralisé à d'autres subdivisions :
- Construction exacte et prouvée

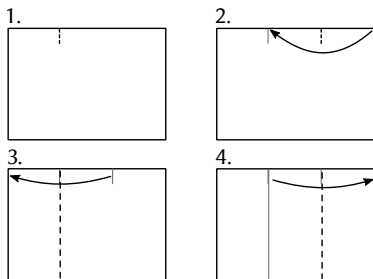


Problèmes

- Cela laisse des traces sur la feuille
- Plier la grande diagonale précisément n'est pas facile
- Repérer un point au milieu de la feuille n'est pas facile

Deuxième solution

Approximation de Fujimoto

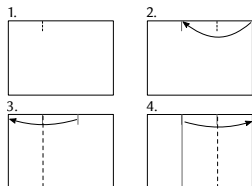


- 1** Estimer le centre
- 2** Ramener un bord sur la marque de 1. et marquer
- 3** Ramener un bord sur la marque de 2. et plier
- 4** Ramener un bord sur la marque de 3. et plier

Deuxième solution

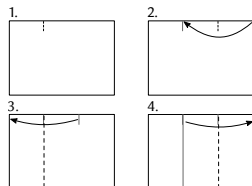
Explications

- Il s'agit d'un **algorithme**



Deuxième solution

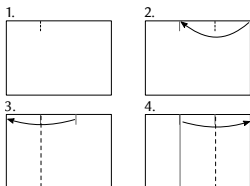
Explications



- Il s'agit d'un **algorithme**
- À chaque étape, la **distance au tiers est divisée par deux**
 - ▶ Si à l'étape 1 on est à 5mm du tiers, à l'étape 3, on sera à 1.25mm du tiers

Deuxième solution

Explications



- Il s'agit d'un **algorithme**
- À chaque étape, la **distance au tiers est divisée par deux**
 - ▶ Si à l'étape 1 on est à 5mm du tiers, à l'étape 3, on sera à 1.25mm du tiers
 - ▶ Si on répète les étapes 2 et 3 une fois de plus, on sera à moins d'un tiers de millimètre du tiers ...

Deuxième méthode

- Les plis parasites sont sur le bord de la feuille
- Plus facile à plier que la première
- Peut se généraliser à d'autres subdivisions

Deuxième méthode

- Les plis parasites sont sur le bord de la feuille
- Plus facile à plier que la première
- Peut se généraliser à d'autres subdivisions
- Mais il s'agit d'une approximation...

Première méthode contre deuxième méthode

Question

Quelle méthode préférez-vous ?

Première méthode contre deuxième méthode

Ou théorie contre pratique

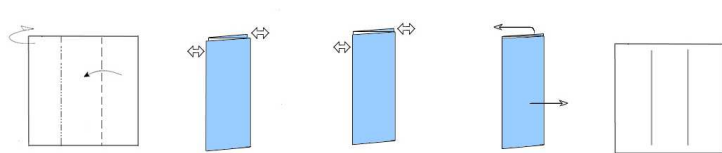
- ▶ C'est un choix personnel...

Première méthode contre deuxième méthode

Ou théorie contre pratique

- ▶ C'est un choix personnel...

En pratique, on fera juste glisser la feuille jusqu'à avoir un tiers raisonnable...



Issu de <https://www.origami-resource-center.com/>

Théorie contre Pratique

Modèle généré par ordinateur



Solenopsis invicta

Robert J. Lang

« Pliage classique »



Fourmichat

Éric Vigier

Plan

- 1 Introduction
- 2 Comment communiquent les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe
- 4 Le pliage dans la science

Le premier origamiste

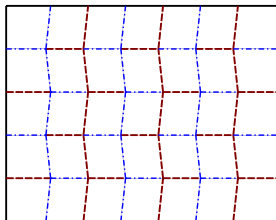


Le premier origamiste



À cause des contraintes physiques.

Miura-Ori



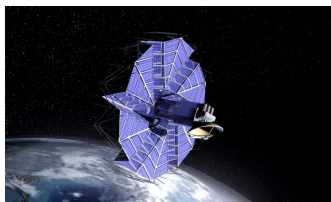
Carte de plis du Miura Ori

- Structure rigide
- Propage les plis automatiquement
- Minimise les contraintes mécaniques



- Pliage de cartes routières

Utilisation



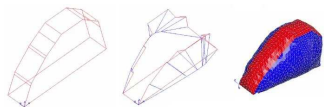
- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites

Utilisation



- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites
- Surfaces légères

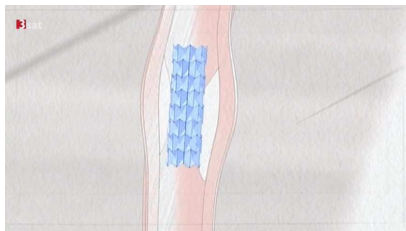
Utilisation



- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites
- Surfaces légères
- Airbags

Stent

Pavage de l'ananas.



Conclusion

- L'homme n'a pas inventé le pliage
- La définition même du pliage est ambiguë
- Le pliage est utile dans toutes les sciences
- C'est une source de problèmes en mathématiques et en informatique
- Et aussi une source d'émerveillement. . .

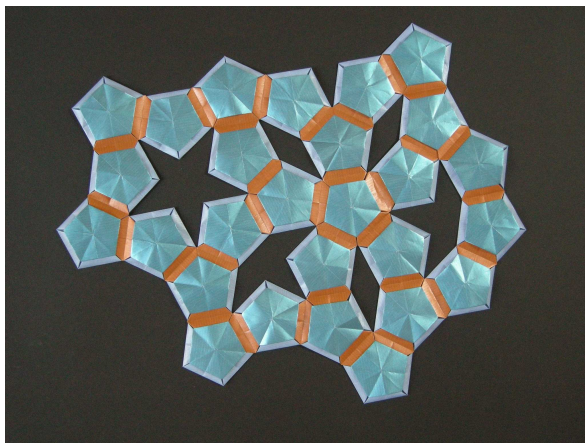
Références

- Le PLI. Édité par le MFPP. n° 14 – 24. Rubrique “Pliage et Mathématiques”.
- The Clouds of Thoki Yenn. 2003. <http://erikdemaine.org/thok/>
- The Miura Ori Map. Ian Bain.
www.britishorigami.info/academic/miura.php (Informations sur le pliage de cartes routières)
- Pliages & Mathématiques. Didier Boursin et Valérie Larose. Éditions ACL. 1997.
- Mathémagie des pliages. Didier Boursin et Valérie Larose. Éditions ACL. 2000.
- The Origami Code. Documentaire. 2015.
- Paper Folding for the Mathematics Class. Donovan A. Johnson. Publié par National Education Association. 2957.
- Origami Ressource Center.
<https://www.origami-resource-center.com/origami-basics.html>

+ tous les plieurs et créateurs présentés au cours des diapos

Merci de votre attention

Questions, remarques ?



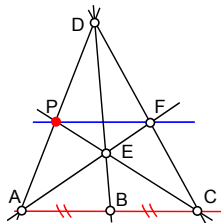
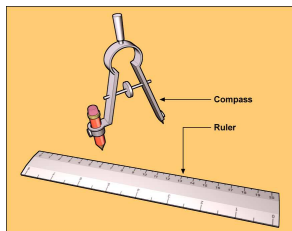
Mélisande*/Christiane Bettens

S'il reste du temps

Le pliage au service des grecs

Nombres constructibles

- Les grecs pensaient que tous les nombres pouvaient être construits à la règle (non graduée) et au compas.



Nombres constructibles

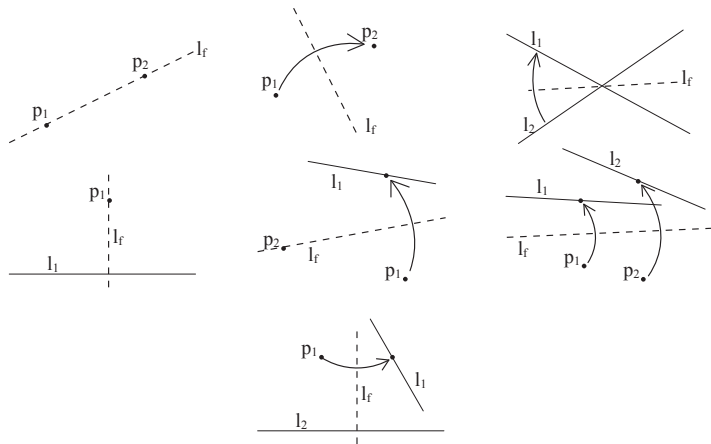
- Trois questions sont restées ouvertes jusqu'à la renaissance :
 - ▶ La duplication du cube
 - ▶ La trisection de l'angle
 - ▶ La quadrature du cercle

Nombres constructibles

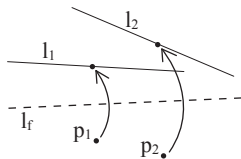
- Trois questions sont restées ouvertes jusqu'à la renaissance :
 - ▶ La duplication du cube
 - ▶ La trisection de l'angle
 - ▶ La quadrature du cercle
- Les deux premiers sont résolubles à l'origami

Représenter le pliage

Axiomes de Huzita-Justin

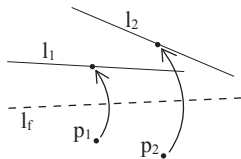


Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

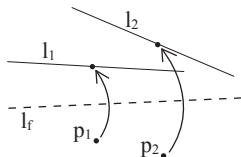
Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

→ Emmener un deux points distincts simultanément sur deux droites distinctes.

Axiome 6 de Huzita-Justin

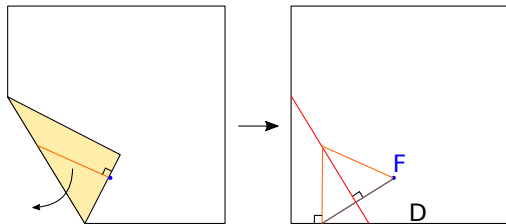


Que signifie-t-il ?

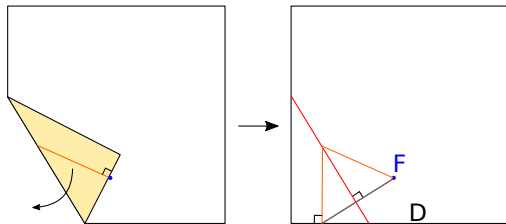
→ Emmener un deux points distincts simultanément sur deux droites distinctes.

Qu'est-ce qu'emmener un point sur une droite ?

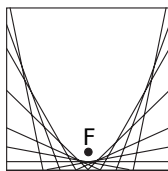
Un point sur une droite



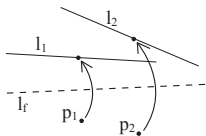
Un point sur une droite



Ce sont les tangentes à une parabole.



Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

Tracer une droite simultanément tangentes à deux paraboles.



⇒ résoudre la duplication du cube

après un peu de travail...