

# Pliages et mathématiques : quelques résultats étonnants

Fabrice Mouhartem

MATH.en.JEANS — Congrès de Lyon 2018

22 mars 2018



# Qu'est-ce que l'origami ?

Du japonais « **Ori** » pour plier et « **Kami** » pour papier.



Créé par Akira Yoshizawa. Plié par Gilad Aharoni.

# Qu'est-ce que l'origami ?

Son origine est incertaine.



Tessellation d'un plisseur

Gérard Lognon



Tour de Garde

David *Gachepapier*

# Qu'est-ce que l'origami ?

Son origine est incertaine.



Tessellation d'un plisseur

Gérard Lognon



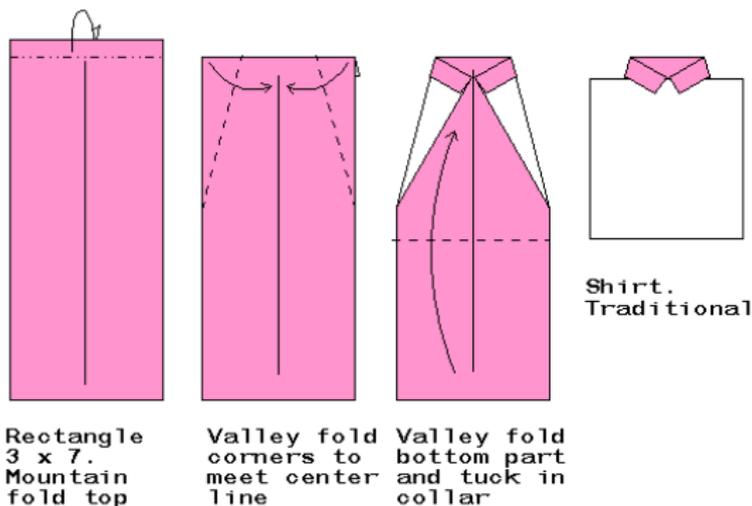
Tour de Garde

David *Gachepapier*

Suivant sa définition de « plier ».

# Les différents styles d'origami

## Origami minimaliste

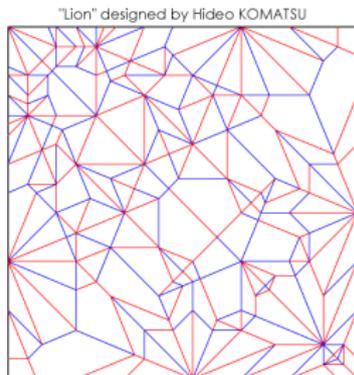


T-Shirt en 4 plis

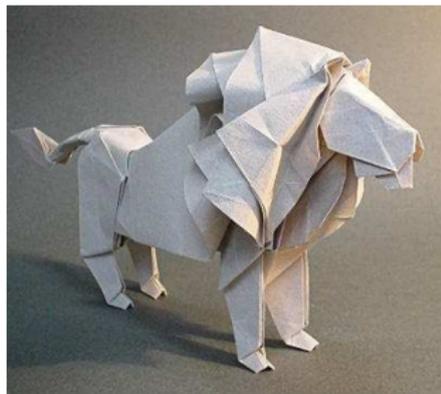
# Les différents styles d'origami

Origami « Traditionnel » ou « 22,5 »

Lion d'Hideo Komatsu ↓



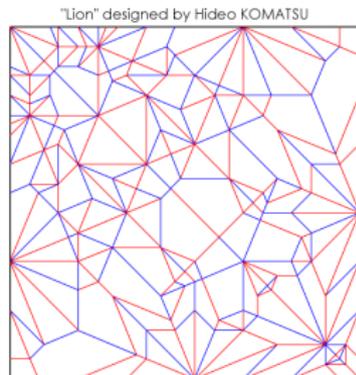
<http://origami.gr.jp/~komatsu/>



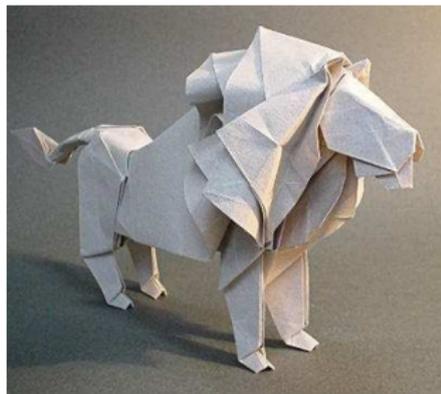
# Les différents styles d'origami

Origami « Traditionnel » ou « 22,5 »

Lion d'Hideo Komatsu ↓



<http://origami.gr.jp/~komatsu/>



↑ En plus de quatre plis.

# Les différents styles d'origami

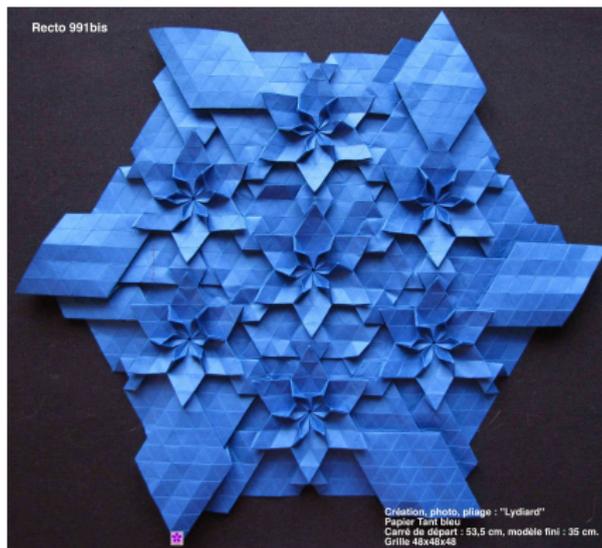
## Origami Modulaire



Kusudama Versailles (60 modules), par *Krystyna Burczyk*

# Les différents styles d'origami

## Tessellations



Lydia Diard

# Les différents styles d'origami

## Tessellations



Joel Cooper



Melina Hermsen



Beth Johnson

# Les différents styles d'origami

Auto-référent/fractale



Roman Diaz



Evan Zodi

# Les différents styles d'origami

Froissing

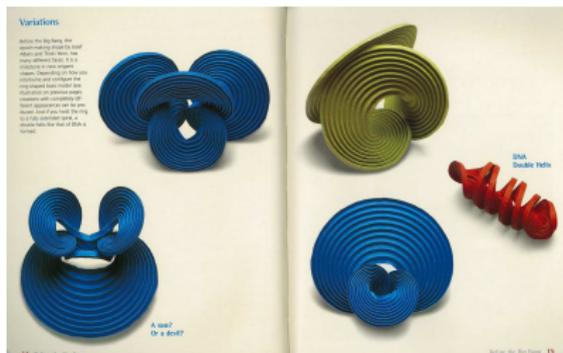


Vincent Floderer

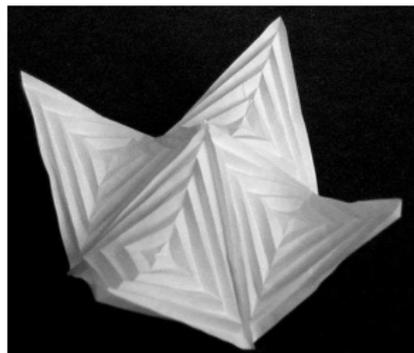


Victor Coeurjoly

# Les différents styles d'origami



Thoki Yenn



Erik Demaine

# Les différents styles d'origami

Pliage humide



Hoàng Tiên Quyêt

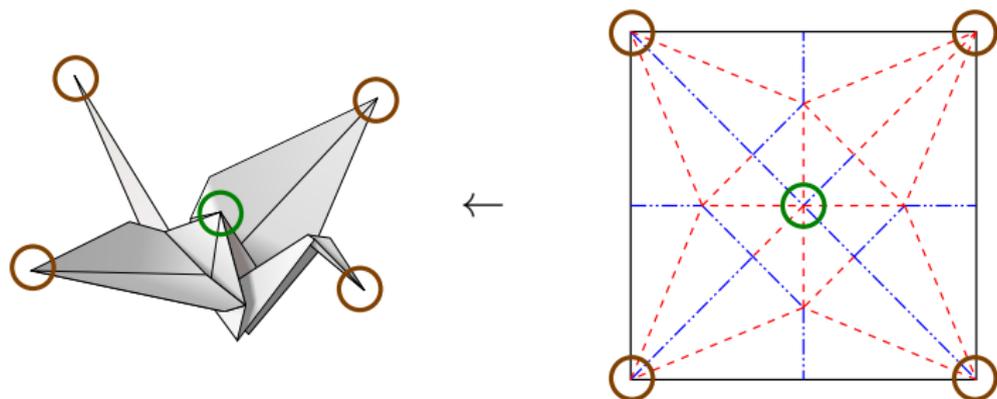


Daniel Chang

# Plan

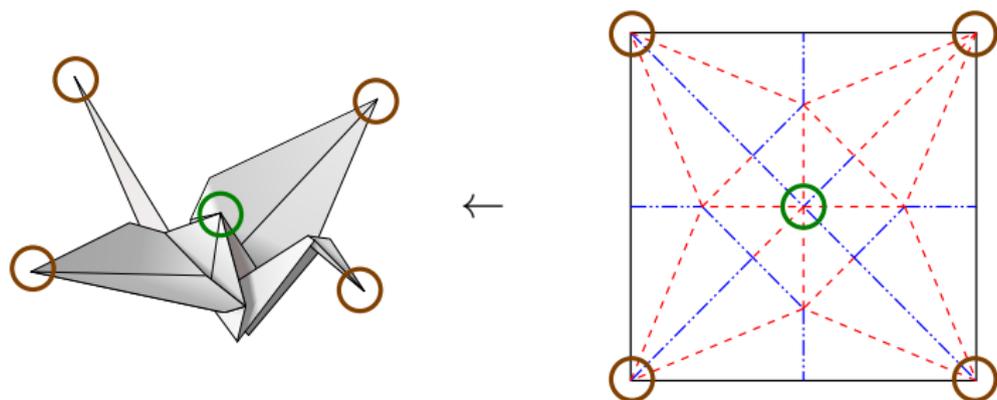
- 1 Introduction
- 2 Comment communiquent les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe
- 4 Le pliage dans la science

# Comment représenter le pliage ?



4 grandes pointes et 1 courte.

# Comment représenter le pliage ?

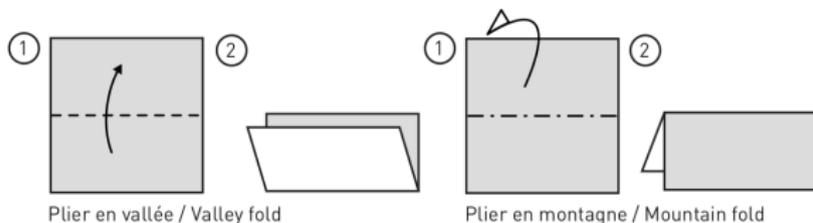


4 grandes pointes et 1 courte.

Il y a *seulement* deux types de plis : les bleus et les rouges.

# Le langage des origamistes

## Le solfège des plieurs

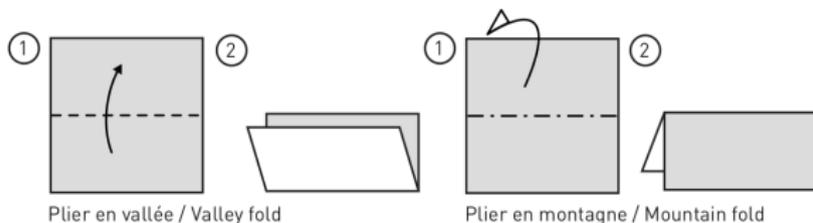


Issu de <http://mfpp-origami.fr/origami/diagrammes/>

- Les pointillés représentent les plis **en vallée**.
- Les points-tirets représentent les plis **en montagne**.

# Le langage des origamistes

## Le solfège des plieurs



Issu de <http://mfpp-origami.fr/origami/diagrammes/>

- Les pointillés représentent les plis **en vallée**.
- Les points-tirets représentent les plis **en montagne**.

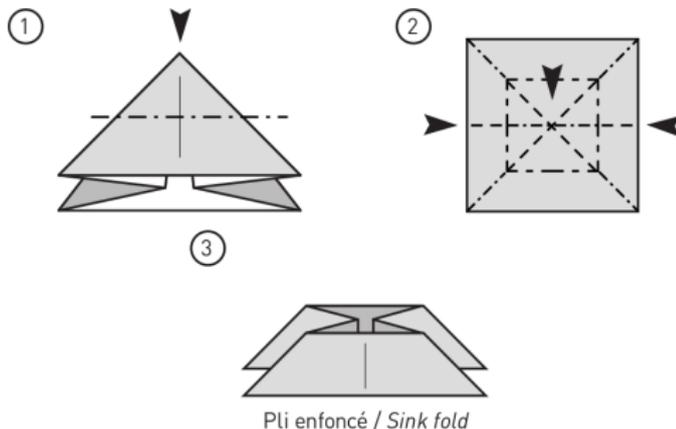
*Remarque.*

Un pli **montagne** devient **vallée** en retournant la feuille.

# Le langage des origamistes

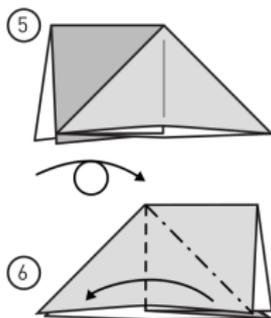
## Le solfège des plieurs

- Pli vallée (creux)  
*Valley fold*
- . . . . . Pli montagne (relief)  
*Mountain fold*
- ↶ Plier, déplier  
*Crease, fold and unfold*
- ↷ Plier vers l'avant  
*Fold toward the front*
- ↶ Plier vers l'arrière  
*Fold toward the back*
- ▶ Enfoncer  
*Push in*
- ↻ Retourner le modèle  
*Turn the model over*
- ➡ Ouvrir, tirer, développer  
*Open out*
- ➡ Vue agrandie  
*Enlarged view*
- Trait d'un pli existant  
*Existing crease*
- ⚡ Replier  
*Crimp, pleat*
- ┆ Insérer, glisser dans  
*Insert, tuck in*
- ⊥ Répéter l'opération deux fois  
*Repeat twice*
- ◐ Couleur dessous  
*Color below*
- ↻ 180°  
*Rotate 180°*

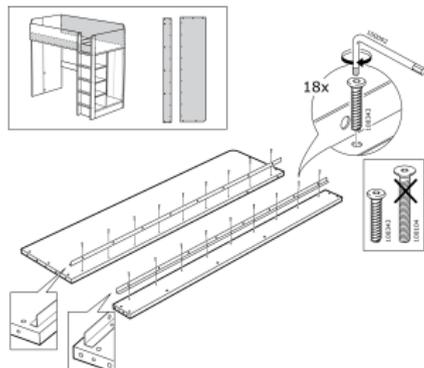


■ Mais il y a aussi des raccourcis

# Le lien entre tout ça ?



6



```
fonction zero_deg2(a,b,c):  
  delta = b*b-4*a*c  
  si delta = 0:  
    renvoyer -b/(2*a)  
  sinon si delta > 0:  
    renvoyer (-b + sqrt(delta)) / (2*a)  
    et (-b - sqrt(delta)) / (2*a)  
  sinon  
    renvoyer "complexe"
```

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Comment communiquent les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe**
- 4 Le pliage dans la science

# Problème

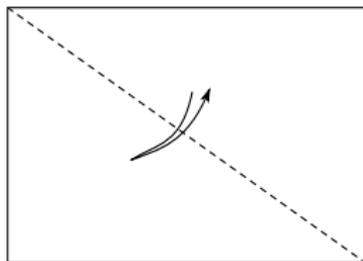
Comment plier une lettre au format **A4** en trois pour qu'elle rentre dans une enveloppe ?



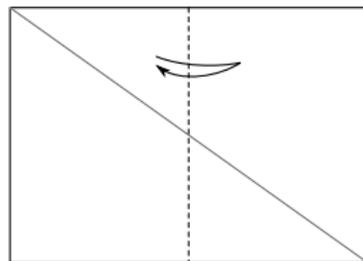
# Première solution

Par le pliage

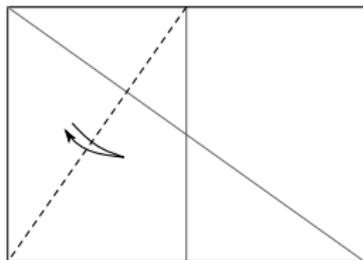
1.



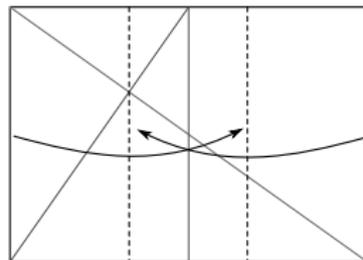
2.



3.



4.



# Première solution

Pourquoi ça fonctionne ?

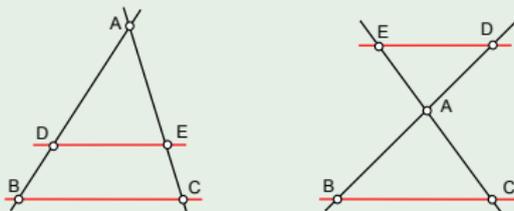
**Des idées ?**

# Première solution

Pourquoi ça fonctionne ?

## Des idées ?

### Théorème de Thalès (4<sup>e</sup>/3<sup>e</sup>)



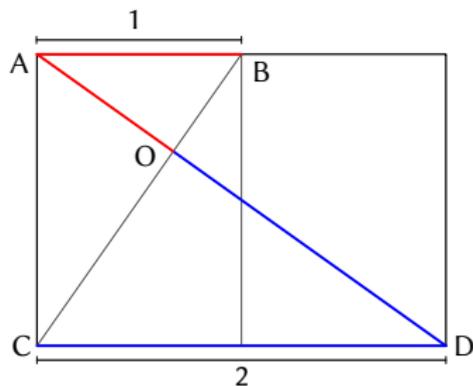
Soit un triangle  $ABC$ , et deux points  $D$  et  $E$  des droites  $(AB)$  et  $(AC)$  de sorte que la droite  $(DE)$  soit parallèle à la droite  $(BC)$ .

Alors :

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BC}}.$$

# Première solution

## Explications

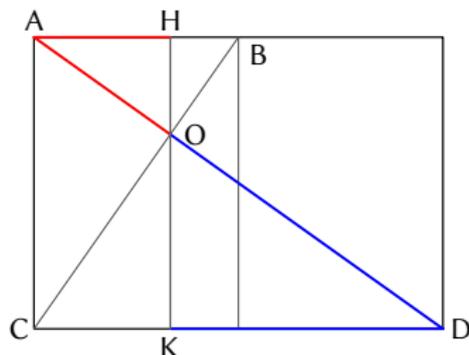


## Théorème de Thalès

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{OD} = 2 \times \overline{OA}$$

# Première solution

Explications



## Théorème de Thalès

$$\frac{\overline{DK}}{\overline{AH}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \frac{2}{1} \Rightarrow \overline{DK} = 2 \times \overline{AH}$$

# Première solution

## Avantages

- Peut-être généralisé à d'autres subdivisions :
- Construction exacte et prouvée



## Problèmes

- Cela laisse des traces sur la feuille

# Première solution

## Avantages

- Peut-être généralisé à d'autres subdivisions :
- Construction exacte et prouvée

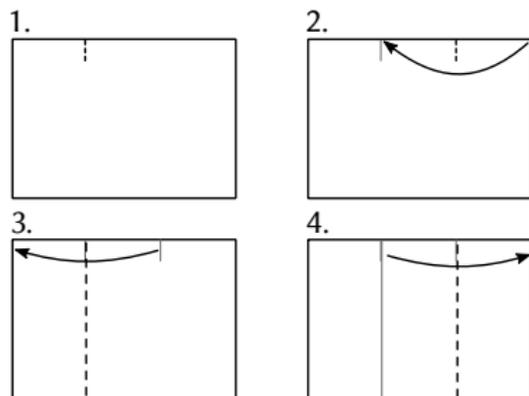


## Problèmes

- Cela laisse des traces sur la feuille
- Plier la grande diagonale précisément n'est pas facile
- Repérer un point au milieu de la feuille n'est pas facile

# Deuxième solution

Approximation de Fujimoto

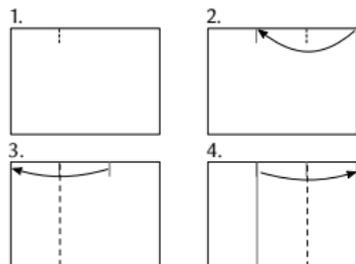


- 1** Estimer le centre
- 2** Ramener un bord sur la marque de 1. et marquer
- 3** Ramener un bord sur la marque de 2. et plier
- 4** Ramener un bord sur la marque de 3. et plier

# Deuxième solution

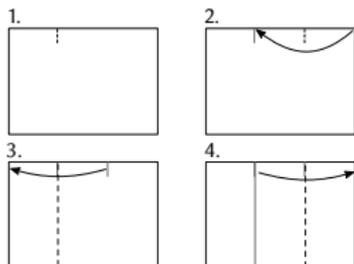
## Explications

- Il s'agit d'un **algorithme**



# Deuxième solution

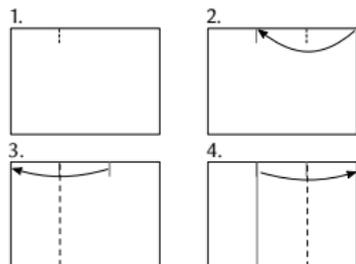
## Explications



- Il s'agit d'un **algorithme**
- À chaque étape, la **distance au tiers est divisée par deux**
  - ▶ Si à l'étape 1 on est à 5mm du tiers, à l'étape 3, on sera à 1.25mm du tiers

# Deuxième solution

## Explications



- Il s'agit d'un **algorithme**
- À chaque étape, la **distance au tiers est divisée par deux**
  - ▶ Si à l'étape 1 on est à 5mm du tiers, à l'étape 3, on sera à 1.25mm du tiers
  - ▶ Si on répète les étapes 2 et 3 une fois de plus, on sera à moins d'un tiers de millimètre du tiers ...

## Deuxième méthode

- Les plis parasites sont sur le bord de la feuille
- Plus facile à plier que la première
- Peut se généraliser à d'autres subdivisions

## Deuxième méthode

- Les plis parasites sont sur le bord de la feuille
- Plus facile à plier que la première
- Peut se généraliser à d'autres subdivisions
- Mais il s'agit d'une approximation...

# Première méthode contre deuxième méthode

Question

Quelle méthode préférez-vous ?

# Première méthode contre deuxième méthode

Ou théorie contre pratique

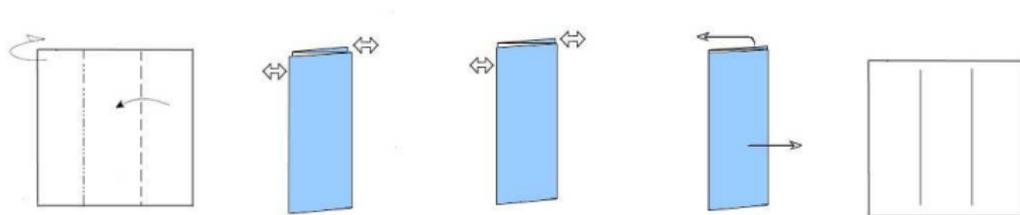
- ▶ C'est un choix personnel...

# Première méthode contre deuxième méthode

Ou théorie contre pratique

- ▶ C'est un choix personnel...

En pratique, on fera juste glisser la feuille jusqu'à avoir un tiers raisonnable...



Issu de <https://www.origami-resource-center.com/>

# Théorie contre Pratique

Modèle généré par ordinateur



*Solenopsis invicta*

Robert J. Lang

« Pliage classique »



Fourmichat

Éric Vigier

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Comment communiquent les plieurs ?
- 3 Plier une lettre dans une enveloppe
- 4 Le pliage dans la science

# Le premier origamiste

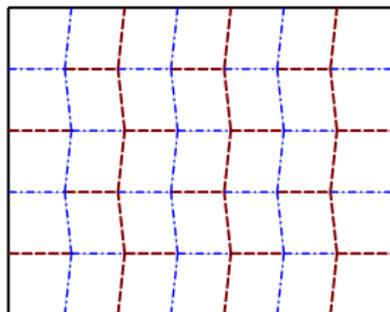


# Le premier origamiste



À cause des contraintes physiques.

# Miura-Ori



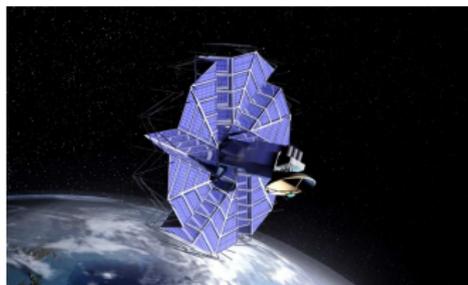
Carte de plis du Miura Ori

- Structure rigide
- Propage les plis automatiquement
- Minimise les contraintes mécaniques



- Pliage de cartes routières

# Utilisation



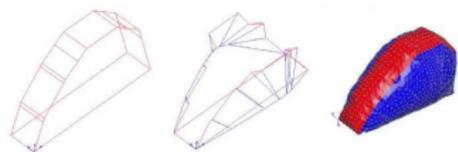
- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites

# Utilisation



- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites
- Surfaces légères

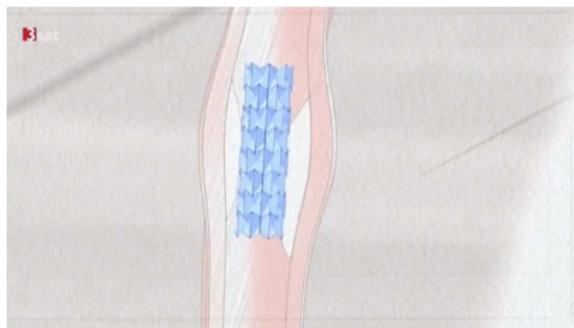
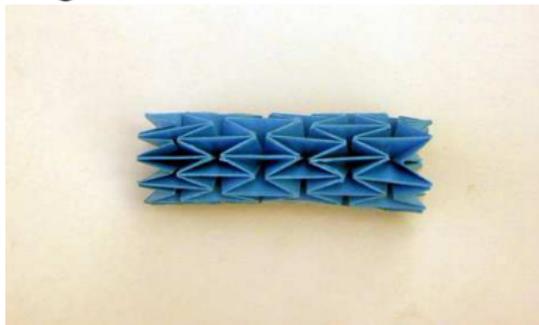
# Utilisation



- Pliage de cartes routières
- Pliage de satellites
- Surfaces légères
- Airbags

# Stent

Pavage de l'ananas.



# Conclusion

- L'homme n'a pas inventé le pliage
- La définition même du pliage est ambiguë
- Le pliage est utile dans toutes les sciences
- C'est une source de problèmes en mathématiques et en informatique
- Et aussi une source d'émerveillement. . .

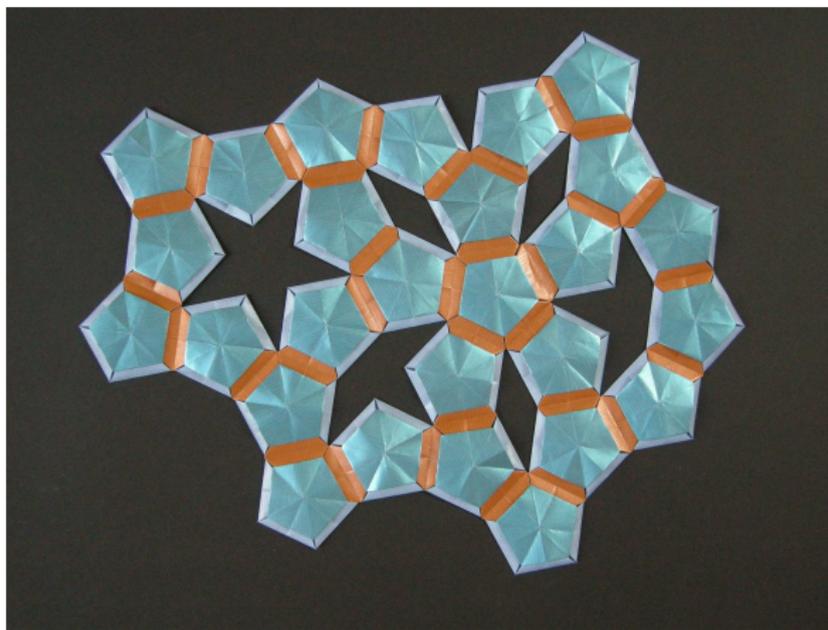
# Références

- Le PLI. Édité par le MFPP. n° 14 – 24. Rubrique “Pliage et Mathématiques”.
- The Clouds of Thoki Yenn. 2003. <http://erikdemaine.org/thok/>
- The Miura Ori Map. Ian Bain.  
[www.britishorigami.info/academic/miura.php](http://www.britishorigami.info/academic/miura.php) (Informations sur le pliage de cartes routières)
- Pliages & Mathématiques. Didier Boursin et Valérie Larose. Éditions ACL. 1997.
- Mathémagie des pliages. Didier Boursin et Valérie Larose. Éditions ACL. 2000.
- The Origami Code. Documentaire. 2015.
- Paper Folding for the Mathematics Class. Donovan A. Johnson. Publié par National Education Association. 2957.
- Origami Ressource Center.  
<https://www.origami-resource-center.com/origami-basics.html>

+ tous les plieurs et créateurs présentés au cours des diapos

# Merci de votre attention

Questions, remarques ?



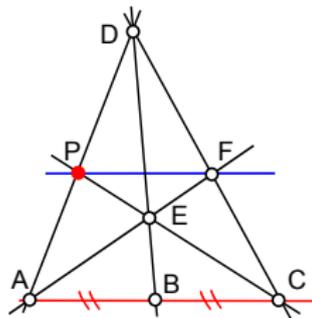
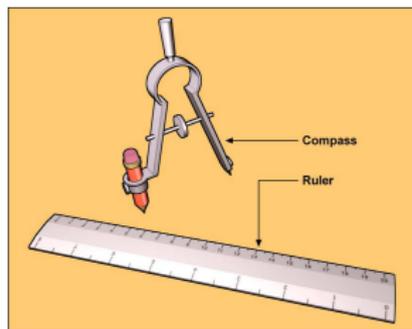
Mélanie\*/Christiane Bettens

S'il reste du temps

## **Le pliage au service des grecs**

# Nombres constructibles

- Les grecs pensaient que tous les nombres pouvaient être construits à la règle (non graduée) et au compas.



# Nombres constructibles

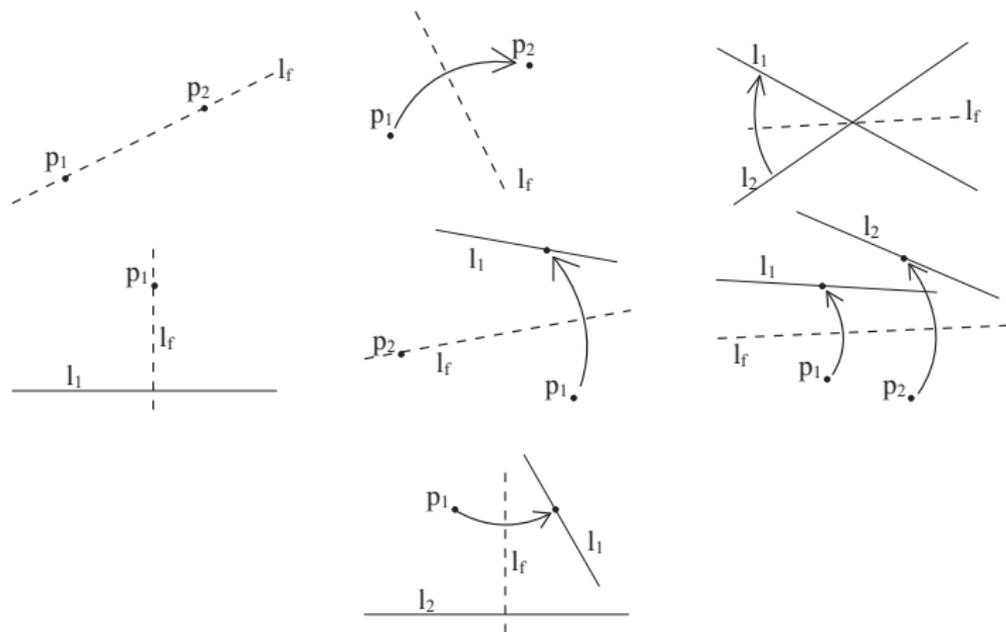
- Trois questions sont restées ouvertes jusqu'à la renaissance :
  - ▶ La duplication du cube
  - ▶ La trisection de l'angle
  - ▶ La quadrature du cercle

# Nombres constructibles

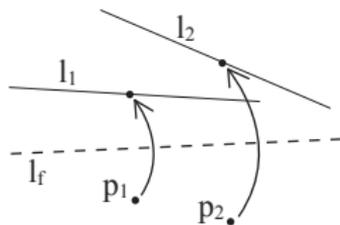
- Trois questions sont restées ouvertes jusqu'à la renaissance :
  - ▶ La duplication du cube
  - ▶ La trisection de l'angle
  - ▶ La quadrature du cercle
- Les deux premiers sont résolubles à l'origami

# Représenter le pliage

## Axiomes de Huzita-Justin

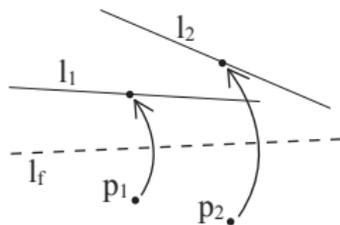


# Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

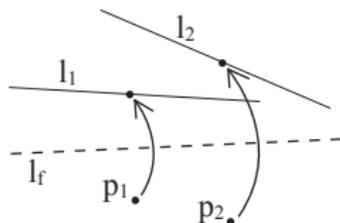
# Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

→ Emmener un deux points distincts simultanément sur deux droites distinctes.

# Axiome 6 de Huzita-Justin

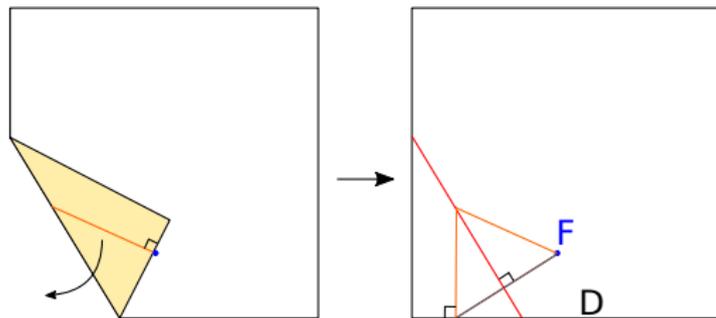


Que signifie-t-il ?

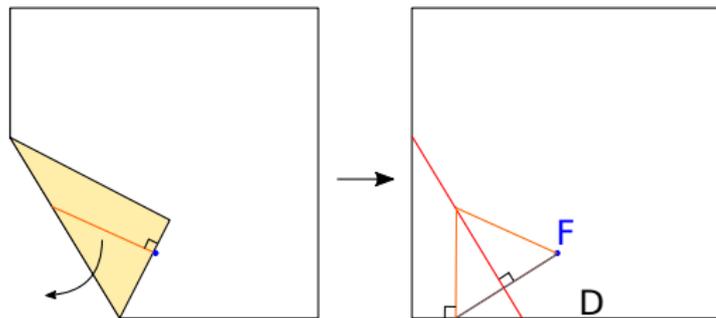
→ Emmener un deux points distincts simultanément sur deux droites distinctes.

Qu'est-ce qu'emmener un point sur une droite ?

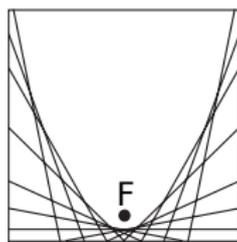
# Un point sur une droite



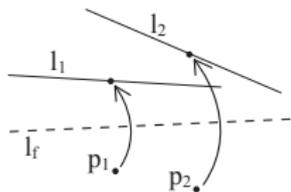
# Un point sur une droite



Ce sont les tangentes à une parabole.



# Axiome 6 de Huzita-Justin



Que signifie-t-il ?

Tracer une droite simultanément tangentes à deux paraboles.



⇒ résoudre la duplication du cube

après un peu de travail...