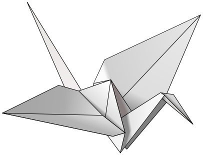
L'origami est NP-complet

Fabrice Mouhartem

Journées Nationales de l'APMEP

22/10/2016

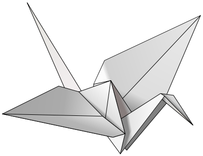
Qu'est-ce que l'origami ?



Étymologie

Du japonais **oru** : plier et **kami** : papier.

Qu'est-ce que l'origami ?

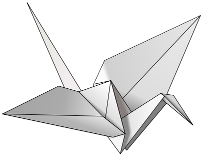


Étymologie

Du japonais **oru** : plier et **kami** : papier.

- Apparu au VI^{e}siècle en Chine avec la diffusion du papier

Qu'est-ce que l'origami ?



Étymologie

Du japonais **oru** : plier et **kami** : papier.

- Apparu au VI^{e}siècle en Chine avec la diffusion du papier
- XX^{e}siècle : *Akira Yoshizawa* introduit l'origami *moderne*

Akira Yoshizawa

Tortue de Yoshizawa, pliée par Gilad Aharoni

L'origami aujourd'hui

Figure – Créations de Lucien Derainne

L'origami aujourd'hui

Figure – La roue d'Étienne Cliquet

L'origami aujourd'hui

Figure – Tesselations et boîtes

Complexité

Complexité

C'est la mesure de la consommation en ressources (temps, espace) d'un programme informatique.

Complexité

Complexité

C'est la mesure de la consommation en ressources (temps, espace) d'un programme informatique.

- Important pour savoir si un problème est difficile à résoudre

Complexité

Complexité

C'est la mesure de la consommation en ressources (temps, espace) d'un programme informatique.

- Important pour savoir si un problème est difficile à résoudre
- Implications en cryptographie, dans la conception des programmes...

Complexité

Complexité

C'est la mesure de la consommation en ressources (temps, espace) d'un programme informatique.

- Important pour savoir si un problème est difficile à résoudre
- Implications en cryptographie, dans la conception des programmes...
- Domaine où résident des questions ouvertes

Référence
SODA'96

The Complexity of Flat Origami

Marshall Bern * Barry Hayes †

Abstract

We study a basic problem in mathematical origami: determine if a given crease pattern can be folded to a flat origami. We show that assigning mountain and valley folds is NP-hard. We also show that determining a suitable overlap order for flaps is NP-hard, even assuming a valid mountain and valley assignment.

1 Introduction

Origami, the centuries-old art of folding paper into sculpture, is currently enjoying a renaissance. Contemporary origami artists invent new models of great beauty and intricacy. To achieve these stunning results, artists such as Engel, Fuse, Lang, and Maekawa have taken a geometric approach to origami design. One useful technique, incorporated into Lang's *TreeMaker* program, uses the centers of non-overlapping disks to

"mountain" and "valley" orientations and determines an overlap order for flaps. If we require that the origami fold flat everywhere, it turns out to be NP-hard [3] to find appropriate orientations and overlap order. Finally, if orientations are given, just finding an overlap order is NP-hard.

Together our results show that the real difficulty of the problem does not lie in simultaneously handling all vertices, but rather in avoiding edge-edge collisions.

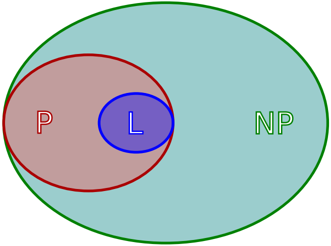
2 Definitions

With some slight deviations, our definitions follow those of other authors [4, 9].

Definition 1. *A* **crease pattern** *is a finite planar straight-line graph drawn on a convex planar region (the* **paper***). A* **crease** *is an edge of the planar graph.*

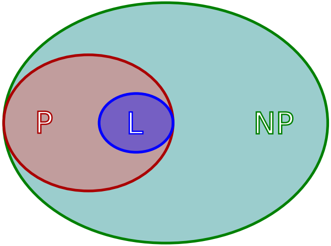
Où en sommes-nous ?

Classes de complexités



Ce sont des ensembles de problèmes partageant *la même efficacité* de résolution.

Classes de complexités



Pourquoi P ?

Les polynômes ont de bonnes propriétés **de régularité** :

$$P + P = P, \quad P \times P = P, \quad P \circ P = P.$$

Ce sont des ensembles de problèmes partageant *la même efficacité* de résolution.

Réduction

- Un problème se **réduit** à un autre si résoudre le second permet de résoudre le premier

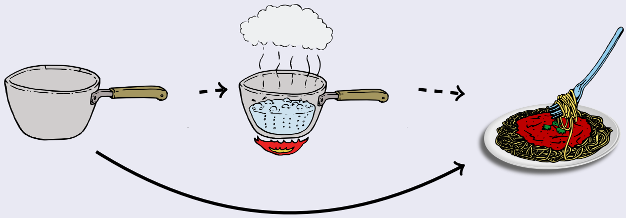
Réduction

- Un problème se **réduit** à un autre si résoudre le second permet de résoudre le premier
- Cela revient à dire que le premier est **plus facile** que le second

Réduction

- Un problème se **réduit** à un autre si résoudre le second permet de résoudre le premier
- Cela revient à dire que le premier est **plus facile** que le second

Exemple



Exemple de réduction

Recouvrement d'ensembles

Entrées : Un ensemble objectif $\mathcal{U}$, un entier objectif k, des ensembles de base $(\boldsymbol{S}_i)_{i=1}^{n}$

Question : Est-il possible de trouver au plus k ensembles de base tels que $\bigcup_{j=1}^{k} \boldsymbol{S}_{i_j} = \mathcal{U}$

Exemple de réduction

Recouvrement d'ensembles

Entrées : Un ensemble objectif $\mathcal{U}$, un entier objectif k, des ensembles de base $(S_i)_{i=1}^{n}$

Question : Est-il possible de trouver au plus k ensembles de base tels que $\bigcup_{j=1}^{k} S_{i_j} = \mathcal{U}$

Recouvrement d'arêtes

Entrées : Un graphe objectif $G = (V, E)$, un ensemble objectif k.

Question : Est-il possible de trouver au plus k sommets $(v_{i_j})_{j=1}^{k}$ tels que $\bigcup_{j=1}^{k} adj(v_{i_j}) = E$

Exemple de réduction

Théorème

Il existe une réduction (*polynomiale*) du recouvrement d'arêtes vers le recouvrement d'ensemble.

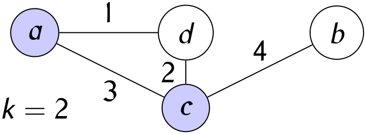
Exemple de réduction

Théorème

Il existe une réduction (*polynomiale*) du recouvrement d'arêtes vers le recouvrement d'ensemble.

Preuve : Étant donné une instance $((V, E), k)$ de recouvrement d'arêtes, on construit une instance de recouvrement d'ensemble :

$$\mathcal{U} \triangleq E \qquad k \triangleq k \qquad \forall i \in V, S_i \triangleq \{e \in E : e \text{ est incident à } i\}$$



$k = 2$

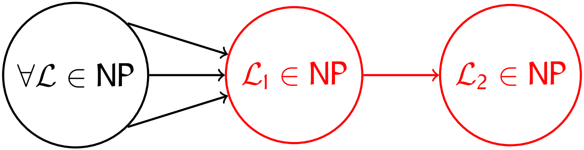
$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$

$S_a = \{1, 3\}$, $S_b = \{4\}$

$S_c = \{2, 3, 4\}$, $S_d = \{1, 2\}$

NP-Complétude

- Un problème NP-Complet est un problème NP qui est **plus difficile** que tous les problèmes NP.



Théorème

$\mathrm{NAE} - 3 - \mathrm{Sat}$ est NP-complet.
$\bigwedge_{i=1}^{m}(\pm x_{i,1} \vee \pm x_{i,2} \vee \pm x_{i,3})$ est-il satisfiable sans avoir $\pm x_{i,1} \wedge \pm x_{i,2} \wedge \pm x_{i,3}$ pour tout i ?

Relativisons

Attention

NP-Complet $\neq$ Difficile

La NP-Complétude ne nous garanti que l'existence d'instances potentiellement difficiles.

Exemples

On ne sait pas si Fact est NP-Complet

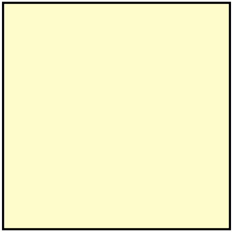
SAT est NP-Complet.

Où en sommes-nous ?

Qu'est-ce qu'un pliage ?

La feuille

La feuille est un carré de côté c dans le plan.



Qu'est-ce qu'un pliage ?

Le pli

Un pli est un segment possiblement infini (demi-droite ou droite) dans le plan.

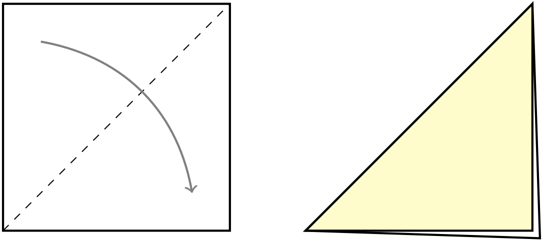


Figure – Pli vallée

Qu'est-ce qu'un pliage ?

On s'intéresse aux origamis pliables à plat, c'est-à-dire qui peuvent être plié sans volume.

Pliable à Plat ✓

→

Non Pliable à Plat ✗

Carte de plis

La carte de plis (ou **CP**) est l'ensemble des plis **utilisés** que l'on obtient en dépliant l'origami.

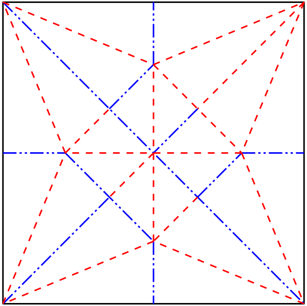
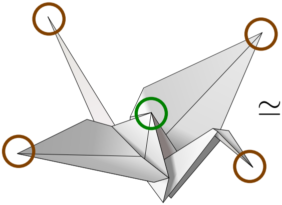


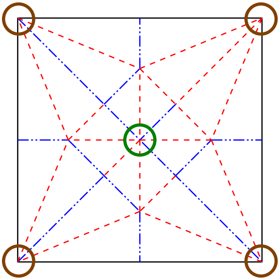
Figure – Carte de Plis de la Base de L'Oiseau.

Carte de plis

Visualisation des pointes sur une carte de plis :



$\simeq$



Où en sommes-nous ?

Notre problème

Le problème « Pliable »

Entrée : Une carte de plis
Question : Est-elle pliable à plat ?

Notre problème

Le problème « Pliable »

Entrée : Une carte de plis
Question : Est-elle pliable à plat ?

Théorème

Ce problème est NP-Complet

Comment le montrer ?

On va faire une réduction depuis NAE-3-SAT.

Comment le montrer ?

On va faire une réduction depuis NAE-3-SAT.

Rappel : NAE-3-SAT

Entrée : $x_1, \ldots, x_n$ variables, $C_1, \ldots, C_m$ clauses.
Question : $\bigwedge_{i=1}^{m} C_i$ est-il satisfiable sans avoir tous les éléments d'une clause à *vrai* ?
Théorème : NAE-3-SAT est NP-Complet.

Comment le montrer ?

On va faire une réduction depuis NAE-3-SAT.

Rappel : NAE-3-SAT

Entrée : $x_1, \ldots, x_n$ variables, $C_1, \ldots, C_m$ clauses.
Question : $\bigwedge_{i=1}^{m} C_i$ est-il satisfiable sans avoir tous les éléments d'une clause à *vrai* ?
Théorème : NAE-3-SAT est NP-Complet.

On va supposer qu'on sait résoudre notre problème, et on va l'utiliser pour résoudre NAE-3-SAT.

Comment faire ?

Comment représenter notre formule ?

Chaque variable est représenté par deux plis.
L'assignation correspond à une orientation de zigzag.

Comment transmettre l'information ?

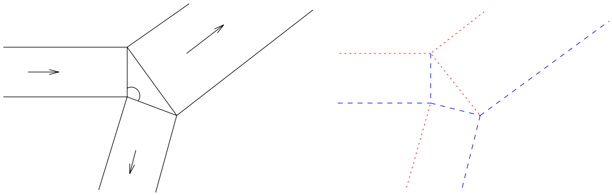


Figure – Gadget réflecteur

Gérer les croisements

Que faire lorsque deux plis se croisent ?

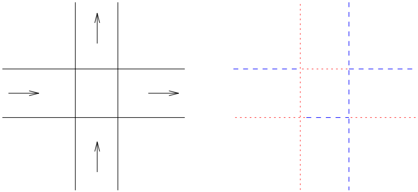


Figure – Gadget de croisement

Et les clauses ?

Clauses

Une clause est représentée par un gadget clause.

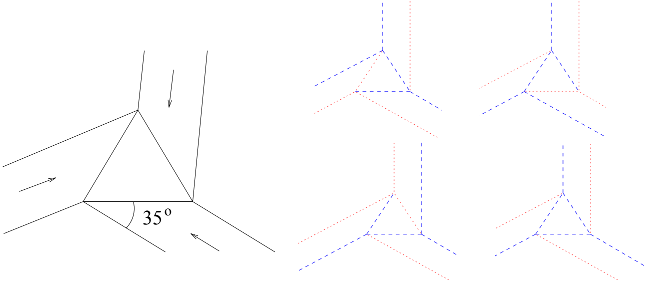


Figure – Gadget de clause

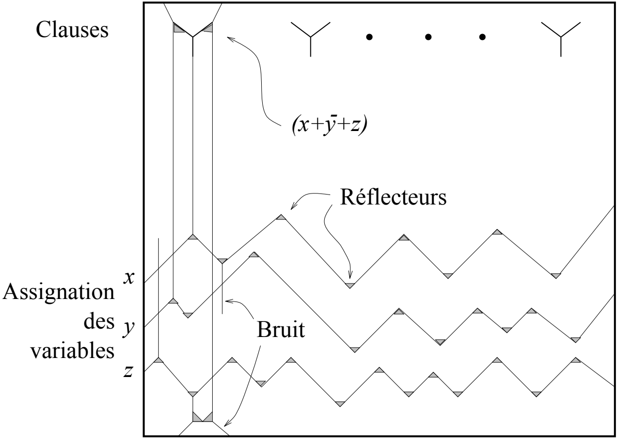
La réduction

On part d'une formule NAE-3-SAT.

1. On place les variables à gauche (par exemple)
2. On place les gadget clauses en haut.
3. On place des réflecteurs pour envoyer la bonne polarité de la variable aux clauses.
4. On envoie les « fils » inutiles ailleurs.

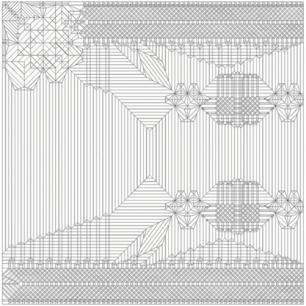
Théorème. Si l'origami ainsi obtenu est pliable à plat, alors la formule initiale est NAE-SAT.

Le tableau final



Conclusion

- L'origami peut *potentiellement* être difficile.
- Mais les CP qu'on voit dans la pratique sont issus d'un processus méthodique de création.
- Ce qui ne rend pas nécessairement sa lecture facile :



$\longrightarrow$

Crédits Photos

- MFPP : `http://mfpp-origami.fr/`
- Wikimedia Commons
  `https://commons.wikimedia.org/wiki/Accueil`
- Quelques travaux personnels